

Вариационная ассимиляция данных наблюдений о температуре на открытой границе в модели гидротермодинамики Балтийского моря

ШЕЛОПУТ Т.О.¹ ✉ sheloput@phystech.edu

¹ИНСТИТУТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ РАН, МОСКВА

1. Введение

- Региональные модели гидротермодинамики могут разрешать масштабы 1-10км, что важно для многих прикладных задач, но их разработчики сталкиваются с **проблемой «открытых границ»**.
- Ассимиляция данных (ДА)** – один из перспективных инструментов для решения этой проблемы.
- Рассматриваемый метод состоит в том, чтобы восстановить граничные функции с использованием теории сопряженных уравнений, оптимального управления и общей методологии исследования обратных задач [1].

2. Математическая модель

Запишем в области D систему уравнений гидротермодинамики в приближении Буссинеска и гидростатики ($t \in (0, \bar{t})$):

$$\begin{cases} \frac{d\vec{u}}{dt} + \begin{bmatrix} 0 & -f \\ f & 0 \end{bmatrix} \vec{u} - g\text{grad}\xi + A_u\vec{u} = \vec{f}^- \\ -\frac{1}{\rho_0}\text{grad}P_a - \frac{g}{\rho_0}\text{grad} \int_0^z \rho_1(T, S) dz' = \vec{f}^- \\ \frac{\partial \xi}{\partial t} - m \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^H u dz \right) - m \frac{\partial}{\partial y} \left(\int_0^H v dz \right) = 0, \\ \frac{dT}{dt} + A_T T = f_T, \quad \frac{dS}{dt} + A_S S = f_S. \end{cases}$$

3. Метод расщепления

Пусть интервал $(0, \bar{t})$ разбит на подынтервалы (t_{j-1}, t_j) , $j = 1, 2, \dots, J$, $t_0 = 0$, $t_J > \bar{t}$. Для аппроксимации задачи по времени используется **метод расщепления** (метод суммарной аппроксимации). На каждом интервале (t_{j-1}, t_j) решаются следующие подзадачи (**шаги** метода расщепления, см. [2]):

- Шаг 1.** Задача о распространении тепла.
Шаг 2. Задача конвекции-диффузии для солёности.
Шаг 3. Задача об отыскании функции уровня и интегральных скоростей.
Шаг 4. Вычисление поля векторов скоростей.

4. Обратная задача

Ассимиляция температуры проводится на Шаге 1 схемы расщепления. Соответствующая обратная задача состоит в отыскании d_T , T удовлетворяющих при ($t \in (t_{j-1}, t_j)$) системе

$$\begin{cases} T_t + \vec{U} \cdot \text{Grad}T - \text{Div}(\hat{a}_T \text{Grad}T) = f_T \text{ в } D, \\ U_n^{(-)} T + \frac{\partial T}{\partial N_T} = m_{w,op} U_n^{(-)} d_T + Q_T \text{ на } \Gamma, \\ T|_{t=t_{j-1}} = T_{j-1} \text{ в } D, \quad \chi_{obs} T = \chi_{obs} T_{obs} \text{ на } \Gamma, \end{cases}$$

где $\Gamma = \partial D$, $U_n^{(-)} \equiv (|U_n| - U_n)/2$, $\Gamma_{w,op}$ – часть открытой границы, где $U_n^{(-)}|_{t=t_{j-1}} \neq 0$, $d_T \equiv 0$ на $(\Gamma \setminus \Gamma_{w,op}) \times (t_{j-1}, t_j)$, χ_{obs} – характеристическая функция границы Γ_{obs} , где имеются данные наблюдений.

5. Итерационный алгоритм

Для решения задачи ассимиляции был предложен следующий итерационный алгоритм:

$$\begin{cases} (T_k)_t + \vec{U} \cdot \text{Grad}T_k - \text{Div}(\hat{a}_T \text{Grad}T_k) = f_T, \\ U_n^{(-)} T_k + \frac{\partial T_k}{\partial N_T} = m_{w,op} U_n^{(-)} d_{T,k} + Q_T, \\ T_k|_{t=t_{j-1}} = T_0; \\ -(T_k^*)_t - \text{Div}(\vec{U} T_k^*) - \text{Div}(\hat{a}_T \text{Grad}T_k^*) = 0, \\ T_k^*|_{t=t_j} = 0, \\ U_n^{(+)} T_k^* + \frac{\partial T_k^*}{\partial N_T} = \chi_{obs}(T_k - T_{obs}); \end{cases}$$

$$d_{T,k+1} = d_{T,k} - \tau_k m_{w,op} U_n^{(-)} \left(\alpha(d_{T,k} - d_T^{(0)}) + T_k^* \right)$$

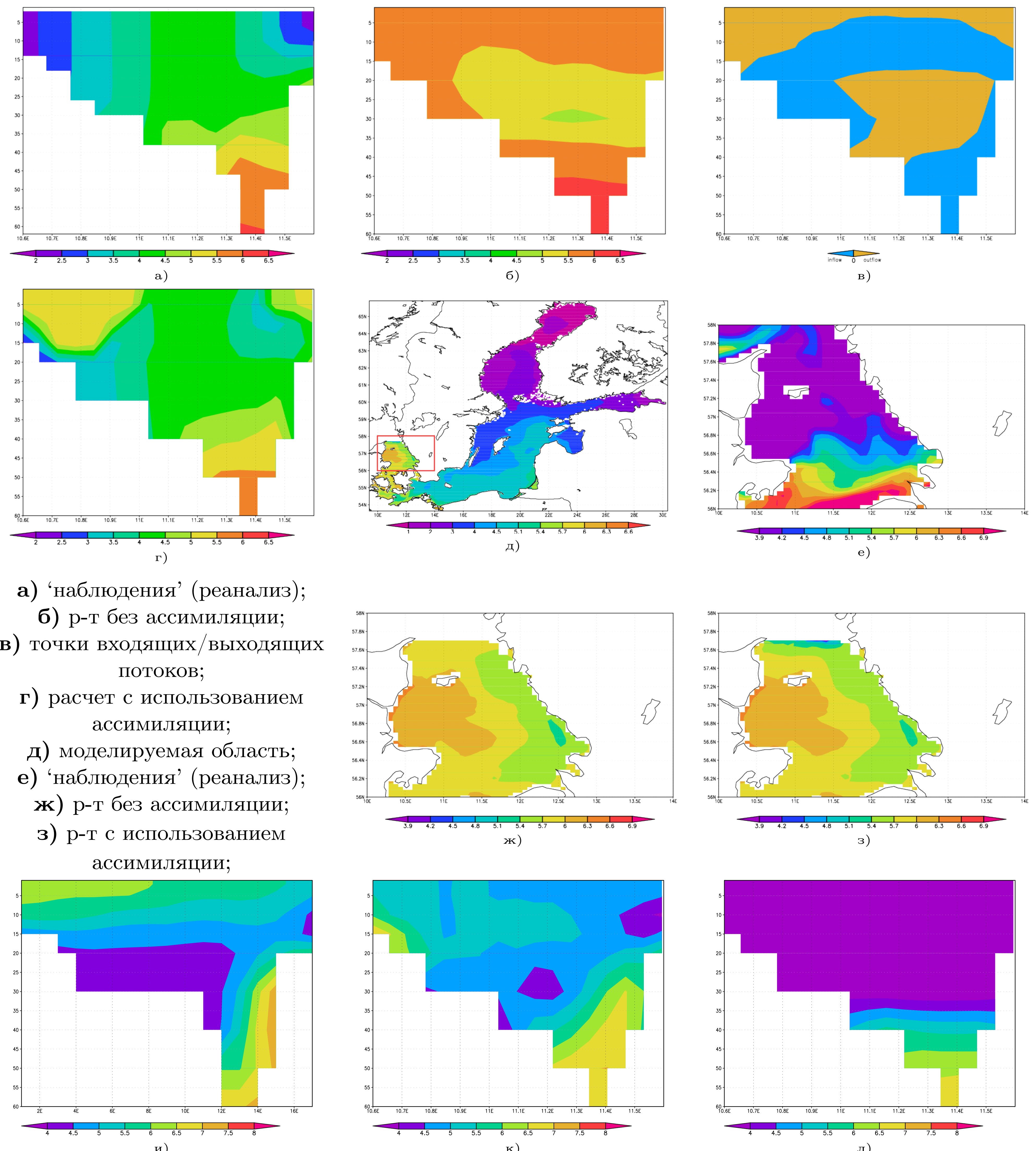
Было доказано, что при $\Gamma_{w,op} \equiv \Gamma_{obs}$ алгоритм сходится к решению.

Список источников

- [1] Агошков В.И. *Методы оптимального управления и сопряженных уравнений в задачах математической физики* – М.: ИВМ РАН, 2016. – 244 с.
 [2] Agoshkov V.I. *Statement and study of some inverse problems in modelling of hydrophysical fields for water areas with 'liquid' boundaries* // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. – 2017. – V. 32, No. 2. – P. 73-90.
 [3] Agoshkov V.I., Sheloput T.O. *The study and numerical solution of some inverse problems in simulation of hydrophysical fields in water areas with 'liquid' boundaries* // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. – 2017. – V. 32, No. 3. – P. 147-164.
 [4] Zalesny V., Gusev A., Chernobay S., Aps R., Tamsalu R., Kujala P., Rytkönen J. *The Baltic Sea circulation modelling and assesment of marine pollution* // Russ. J. Numer. Analysis and Math Modelling, 2014. V.29, no. 2, pp. 129-138.
 [5] *Baltic Sea Physics Reanalysis from SMHI (1989-2014)* // Copernicus marine environment monitoring service. URL: <http://marine.copernicus.eu>.

7. Результаты численных экспериментов для модели [4]

Описанная выше процедура ассимиляции была включена в модель Балтийского моря [4], данные [5] были использованы как ‘наблюдения’. Ниже приведено сравнение результатов расчетов и данных наблюдений, приведены профили температуры по глубине и поверхностная температура в конечный момент времени расчета.



а) ‘наблюдения’ (реанализ); б) р-т без ассимиляции; в) точки входящих/выходящих потоков; г) расчет с использованием ассимиляции; д) моделируемая область; е) ‘наблюдения’ (реанализ); ж) р-т без ассимиляции; з) р-т с использованием ассимиляции; и) ‘наблюдения’ (реанализ); к) р-т с использованием ассимиляции; л) р-т без ассимиляции.