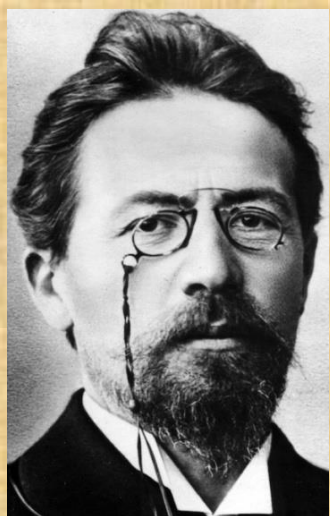


**Н. Макаренко (ГАО РАН, Санкт-Петербург; ИИВТ, Алматы, РК);
И.Князева (ГАО РАН, Санкт-Петербург; ИИВТ, Алматы, РК);
А.Рыбинцев (ГАО РАН, Санкт-Петербург);
А.Терехов (ИИВТ, Алматы, РК)**

МЕТОДЫ ДИСКРЕТНОЙ РИМАНОВОЙ ГЕОМЕТРИИ В АНАЛИЗЕ ЦИФРОВЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ.



**СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ ДИСТАНЦИОННОГО ЗОНДИРОВАНИЯ ЗЕМЛИ ИЗ КОСМОСА. 11–15
ноября 2019 г., Москва, ИКИ РАН**



— Знаешь, что, Вася? Поедем! Накажи меня Господь, поедем!

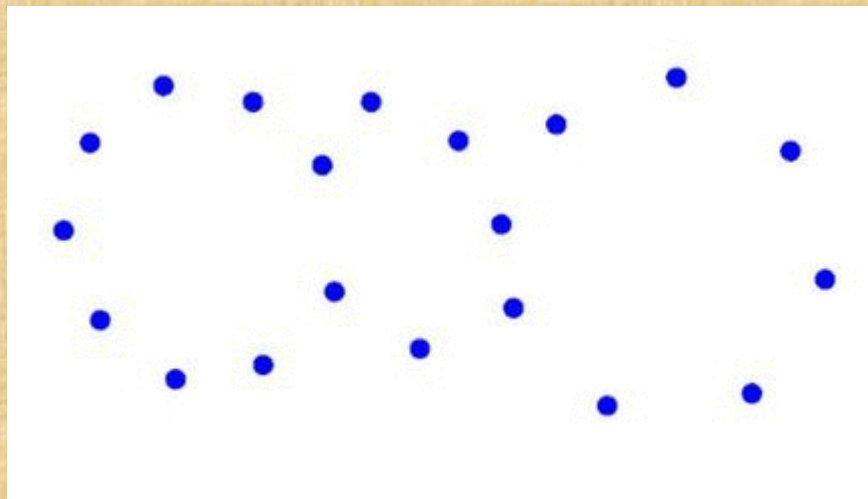
Ведь Париж, заграница... Европа!

— Чего я там не видел? Ну его!

— Цивилизация! — продолжал восторгаться Лампадкин.

— Господи, какая цивилизация! Виды эти, разные Везуви... окрестности! Что ни шаг, то и окрестности! Ей-богу, поедем!

(А.Чехов, в Париж!)



ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ





КОМПЛЕКС ЧЕХА И ТЕОРЕМА О НЕРВЕ

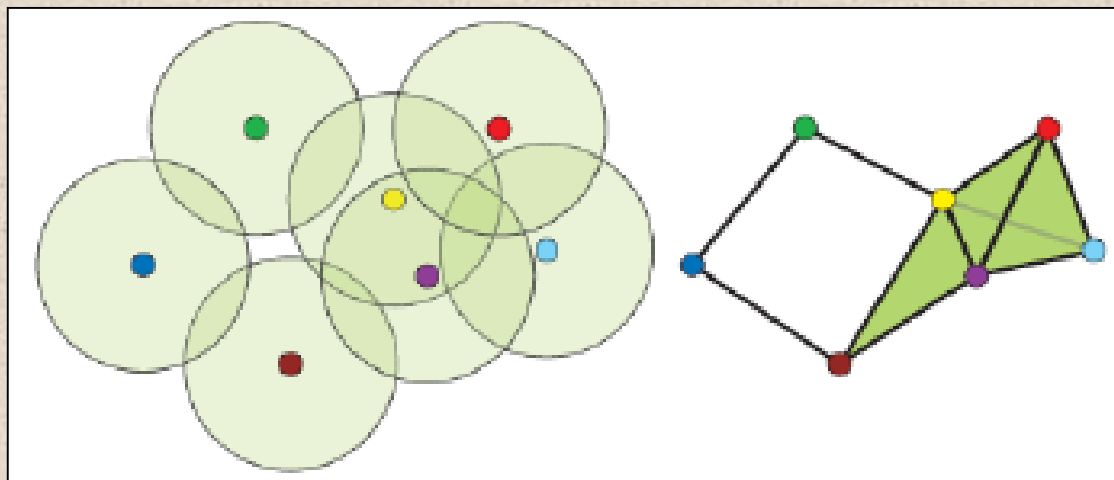
Для множества симплексов с вершинами

$$v_1, v_2, \dots, v_k \in S$$

Комплексом Чеха называют:

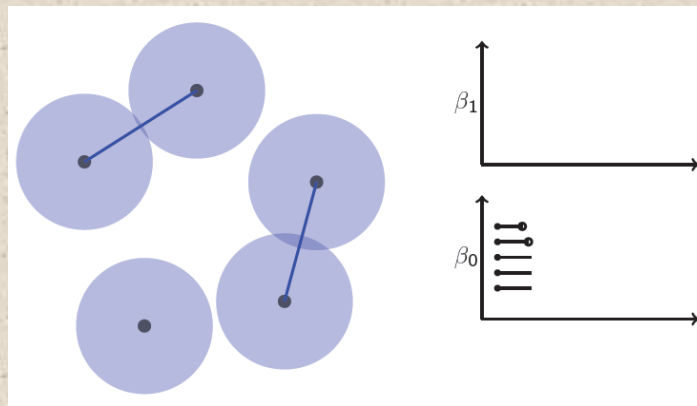
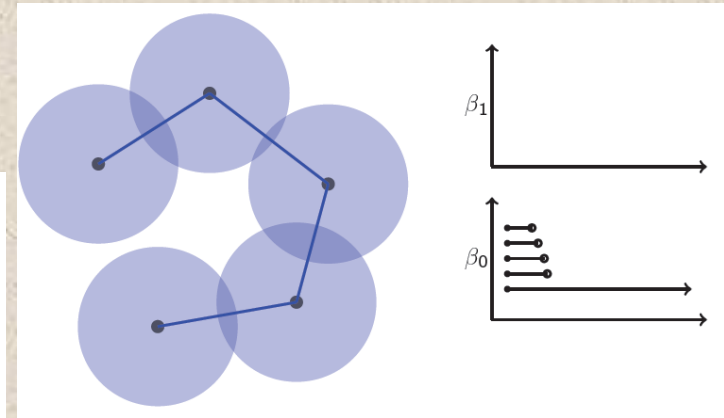
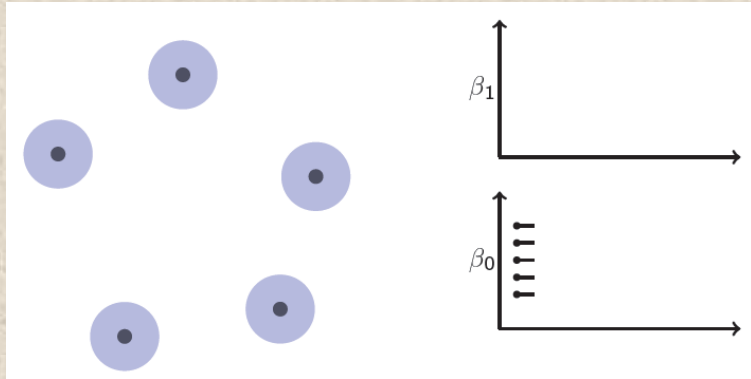
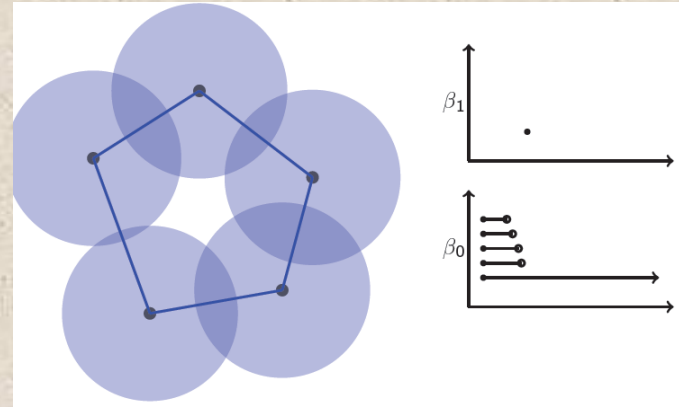
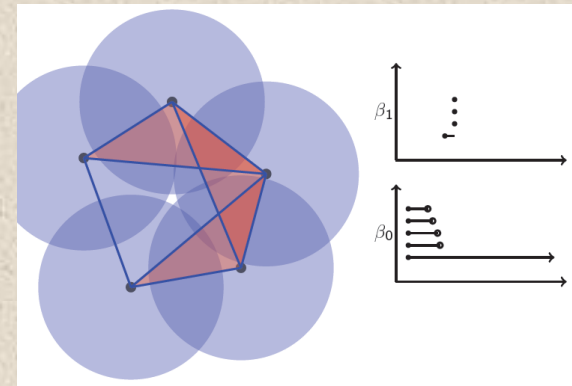
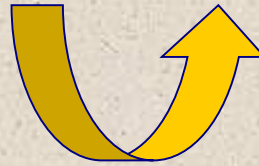
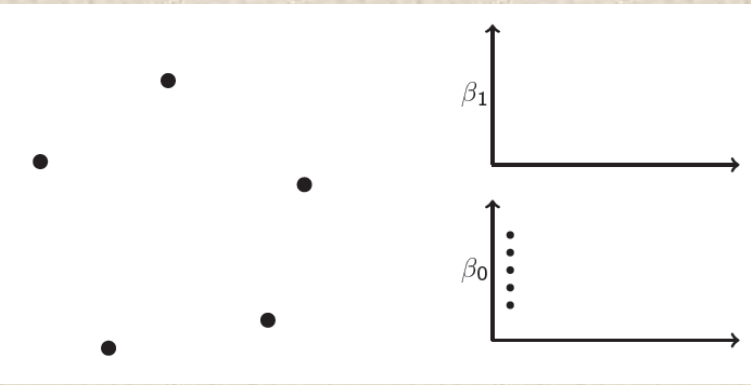
$$\check{C}ech(S, \varepsilon) = \bigcap_{i=1}^k B(v_i, \varepsilon)$$

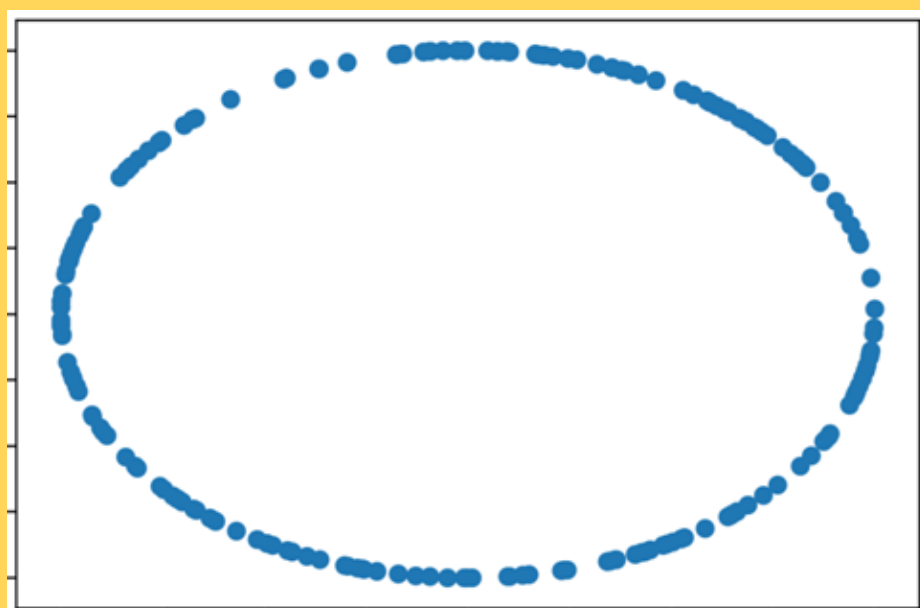
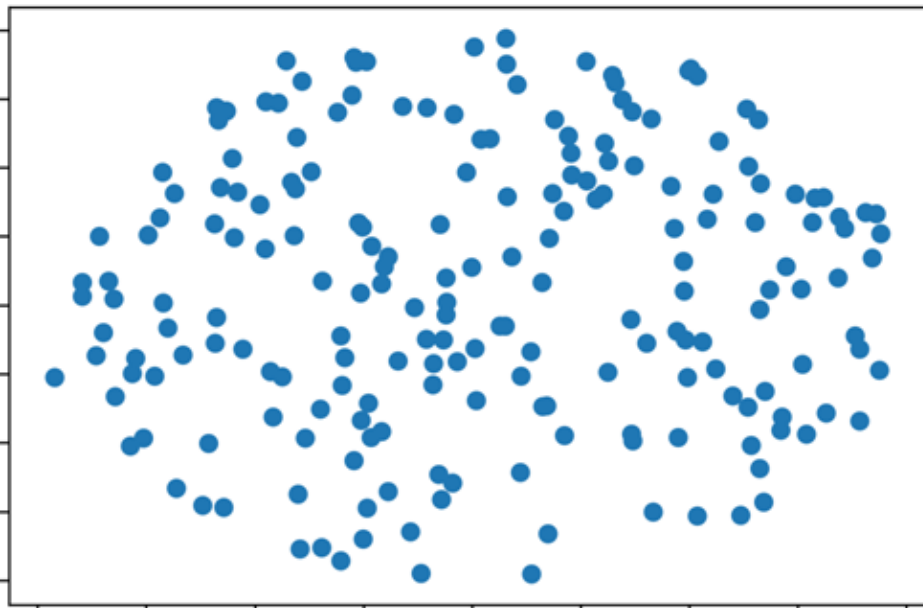
Э.Чех
(1893-1960)



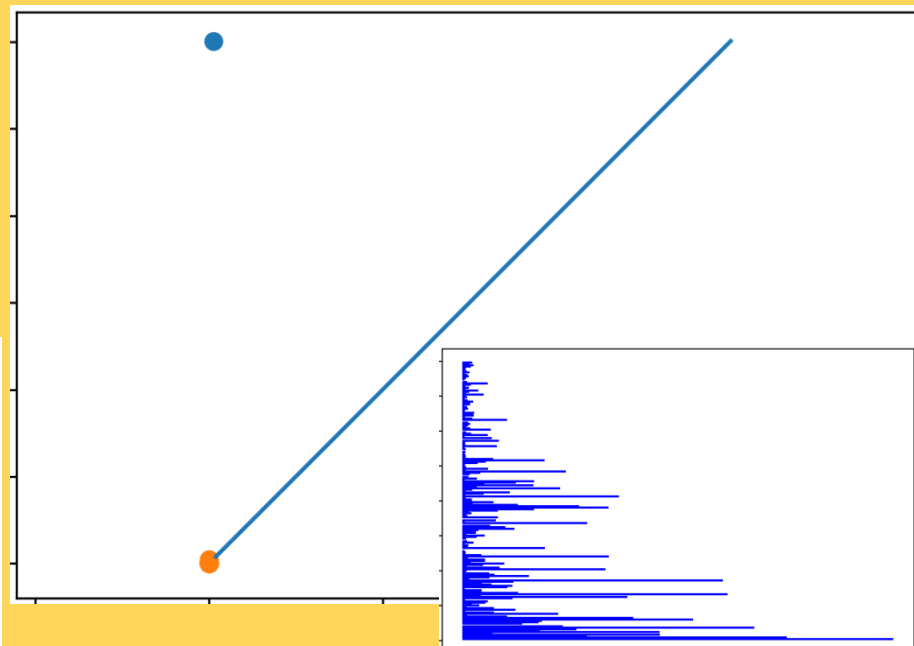
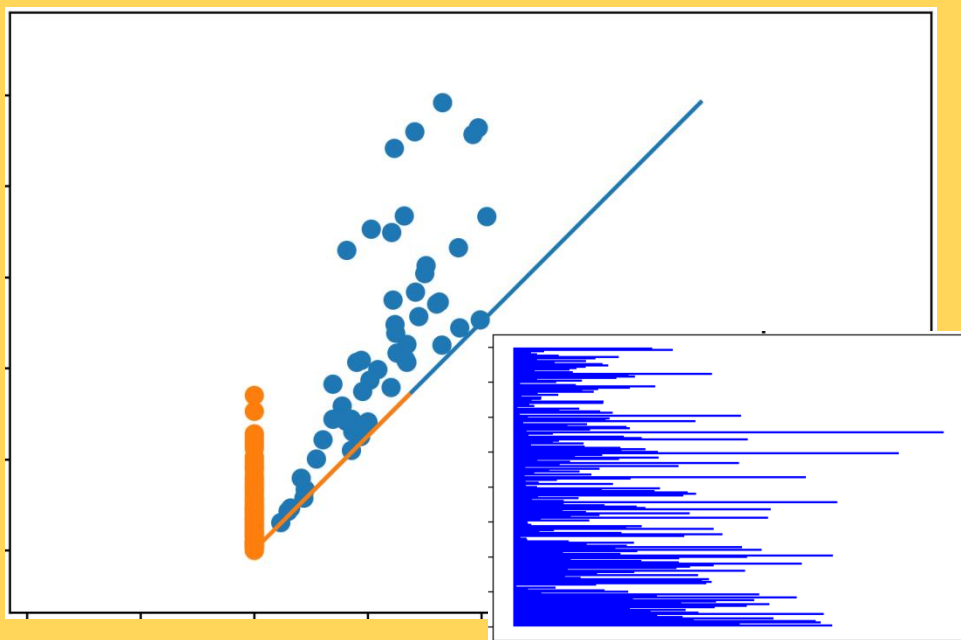
$$\check{C}ech(S, \varepsilon) \sim S \oplus \varepsilon$$

ФИЛЬТРАЦИЯ ЧЕХА



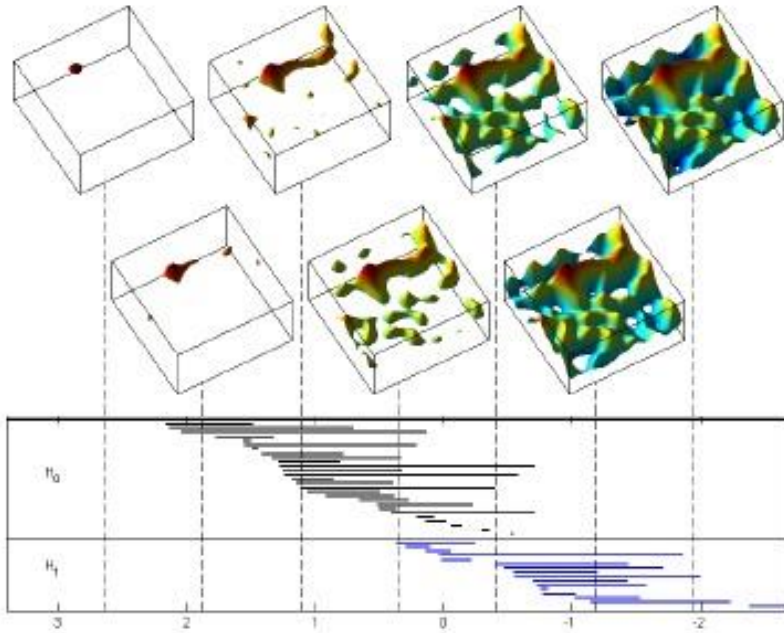


N=200

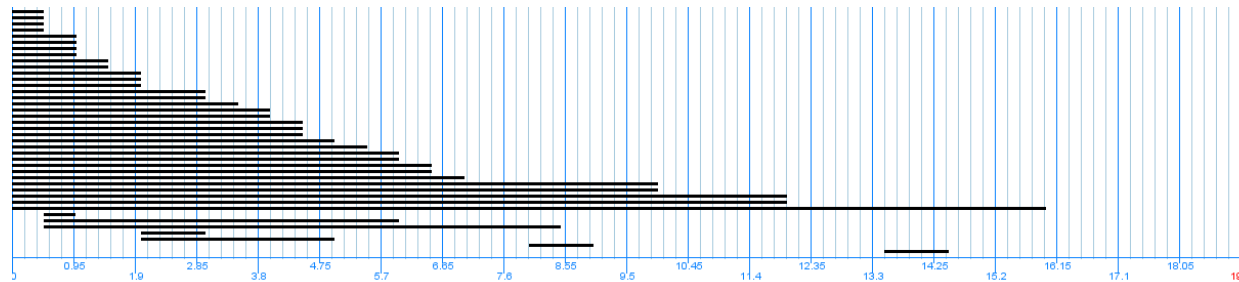
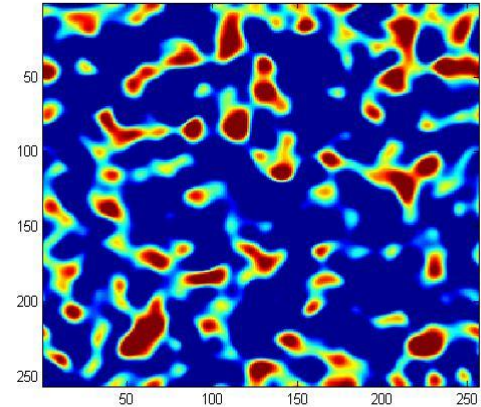


БАРКОДЫ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ

R.J. Adler, J.E. Taylor, [Topological complexity of smooth random functions.](#)(Springer 2011)

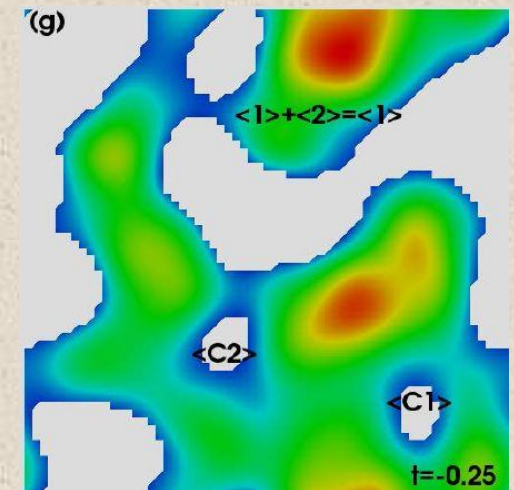
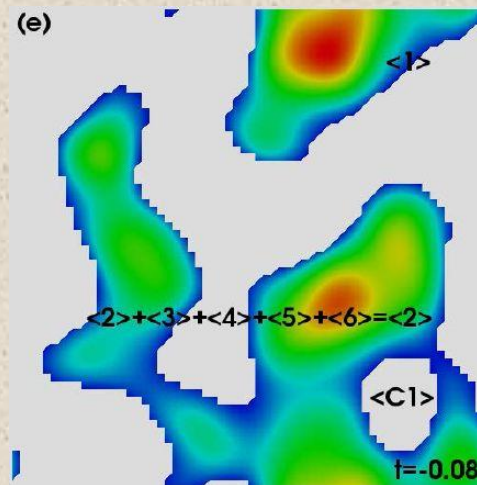
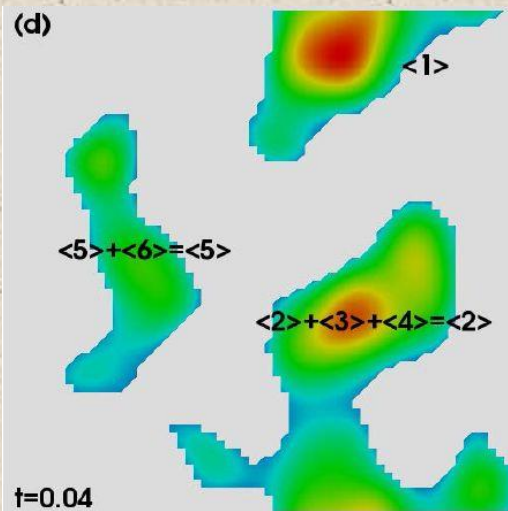
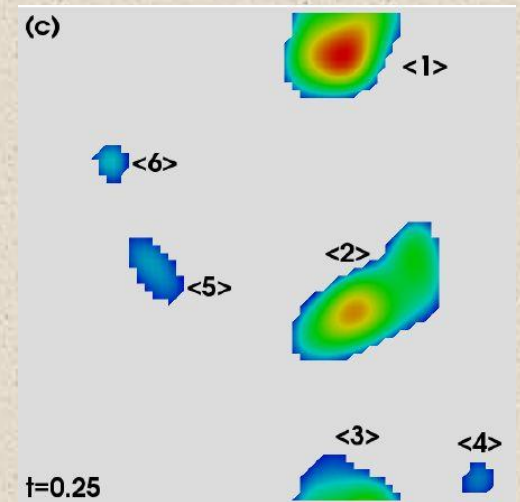
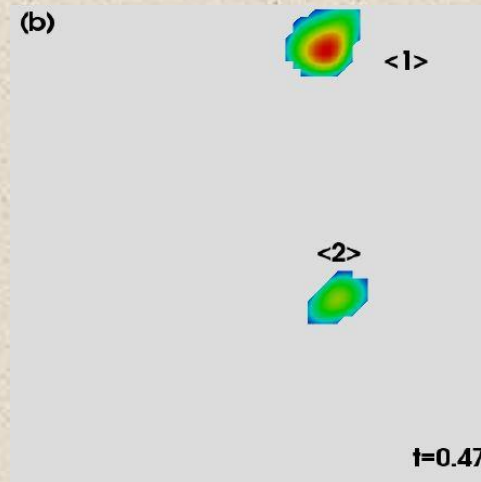


Гауссовское поле

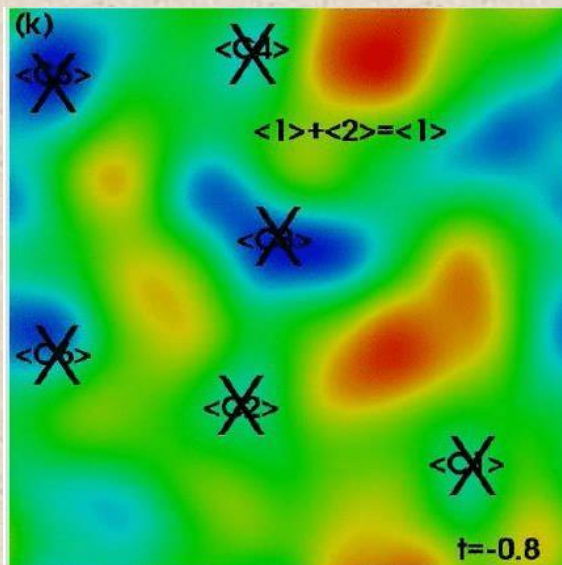
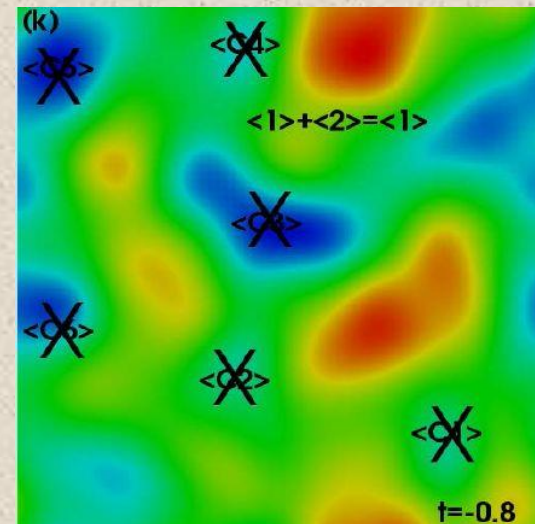
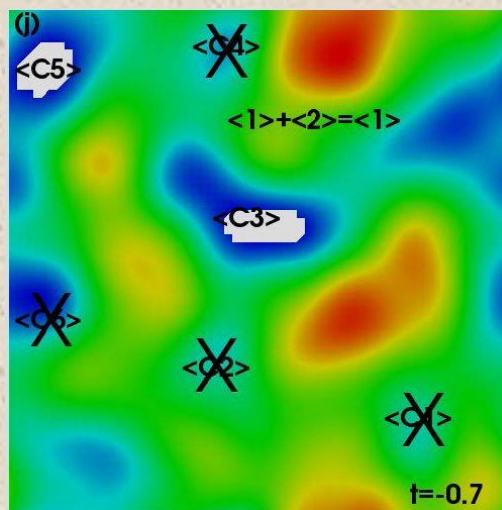
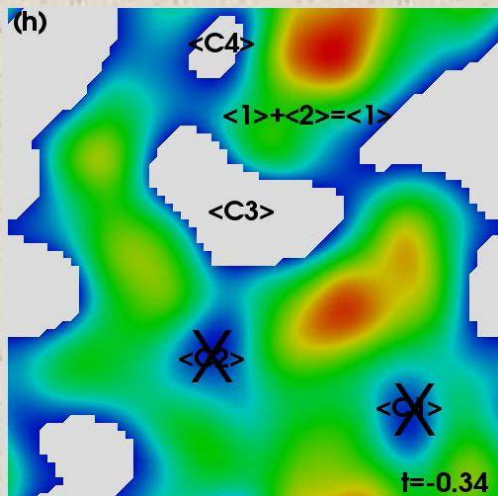


wit: Dimension 1

Persistence: level sets



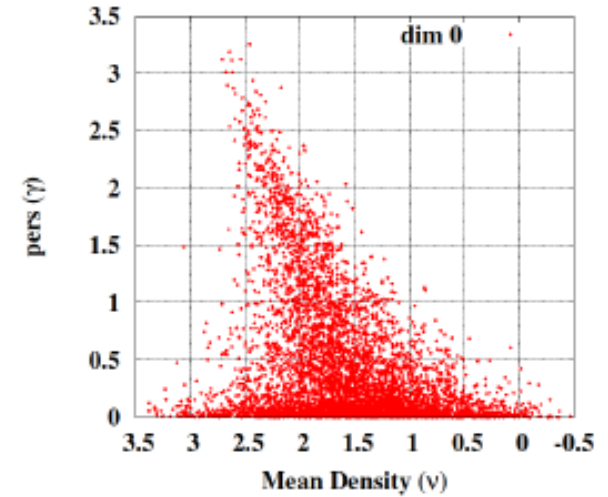
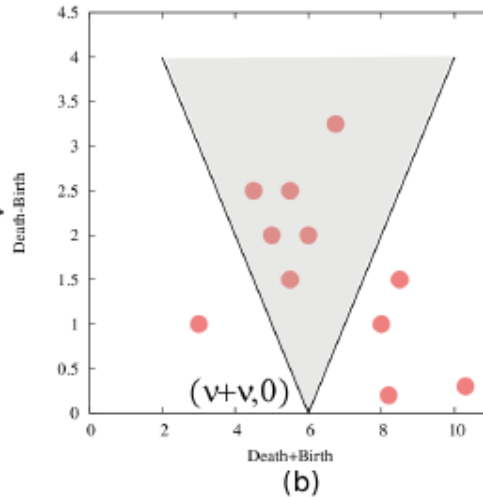
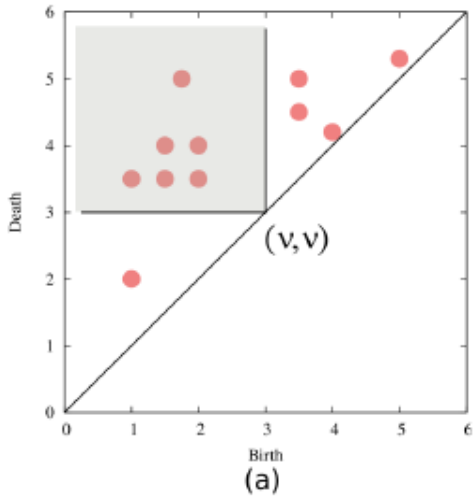
Persistence: level sets



Макаренко Н. Г. и др.
Распознавание текстур на
цифровых изображениях
методами вычислительной
топологии // Современные
проблемы дистанционного
зондирования Земли из
Космоса. – 2015. – Т. 12. – С.
131.



Персистентные диаграммы



$$\frac{D + B}{2} = \text{средняя плотность}$$

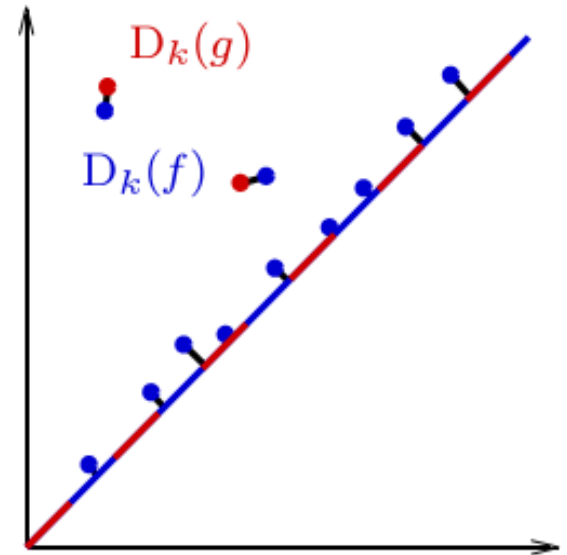
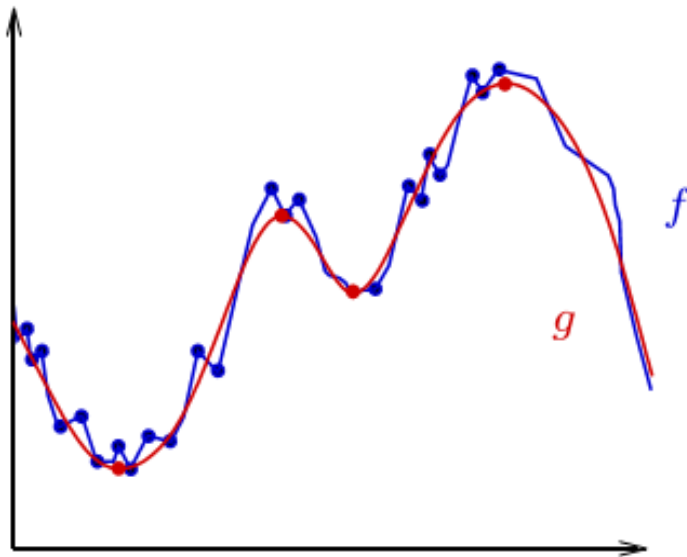
$$D - B = \text{персистентность}$$

$$\langle I_{ij} \rangle = \frac{\langle N_{ij} \rangle}{\langle N_{tot} \rangle}$$

ЧТО ДЕЛАТЬ?



ТЕОРЕМА УСТОЙЧИВОСТИ



Для двух ручных непрерывных функций f и g на конечно триангулируемых пространствах

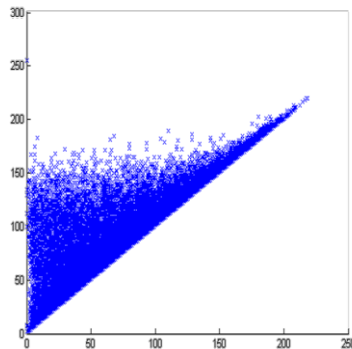
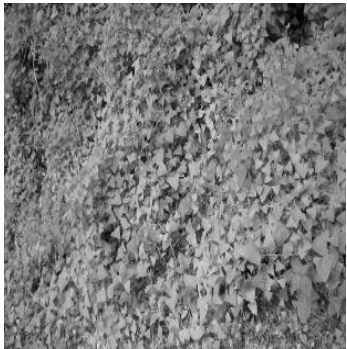
$$d_b \left(D_k(f), D_k(g) \right) \leq \|f - g\|_\infty$$

КАК ВЕКТОРИЗОВАТЬ ДП?

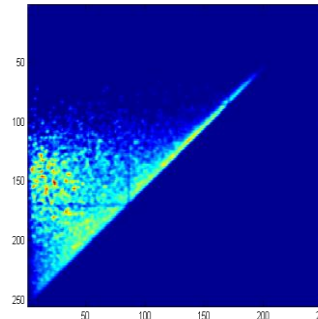
1. Поместим в каждую точку ДП центр 2-D гауссовское ядро.
2. Найдем сумму всех гауссиан.
3. Перевычислим полученную функцию на новую решетку.

$$I(p) = \iint_p \sum_{(b_x, b_y) \in \mathbf{B}} \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{(x-b_x)^2}{\sigma_x^2} + \frac{(y-b_y)^2}{\sigma_y^2}\right)} dydx$$

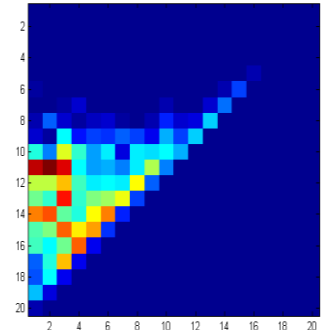
$$I(p) = \iint_p \sum_{(b_x, b_y) \in \mathbf{B}} f(|\mathbf{b}|) \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{(x-b_x)^2}{\sigma_x^2} + \frac{(y-b_y)^2}{\sigma_y^2}\right)} dydx$$



PD

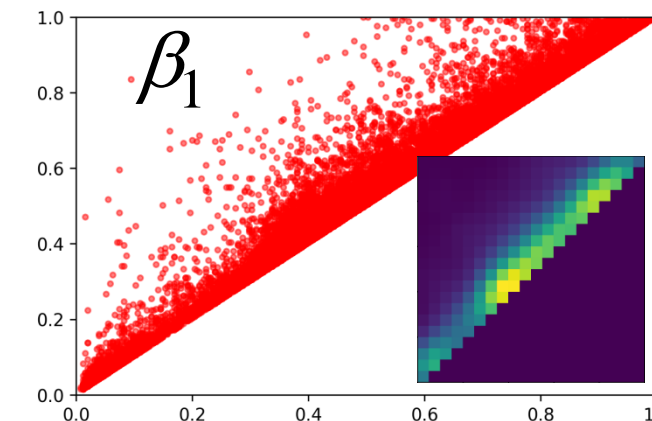
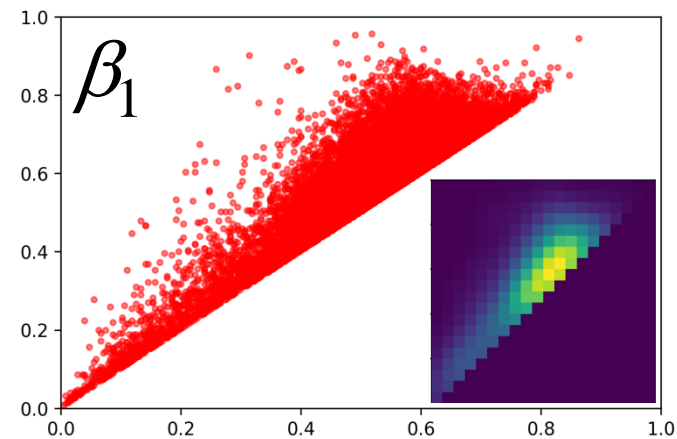
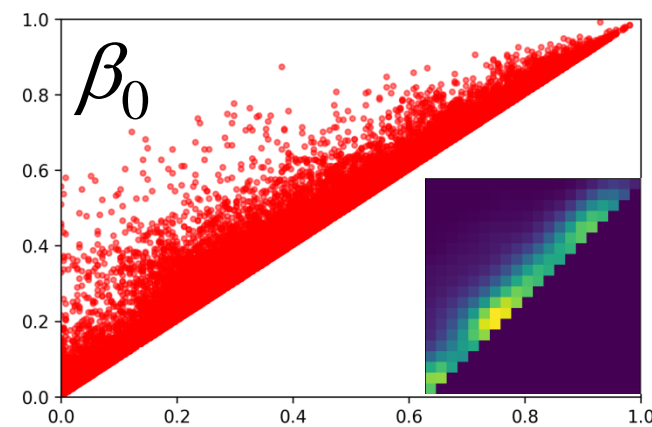
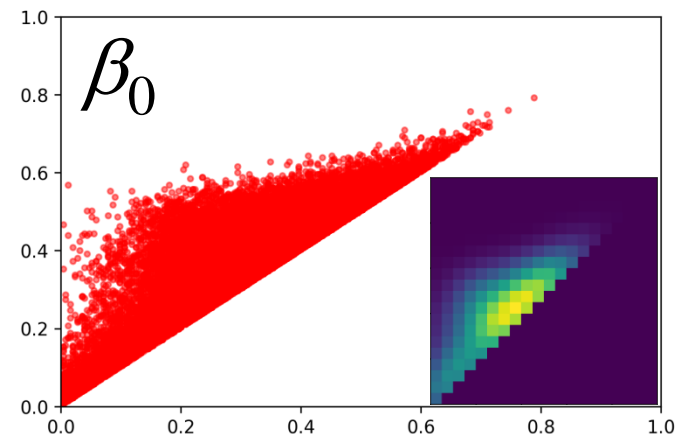
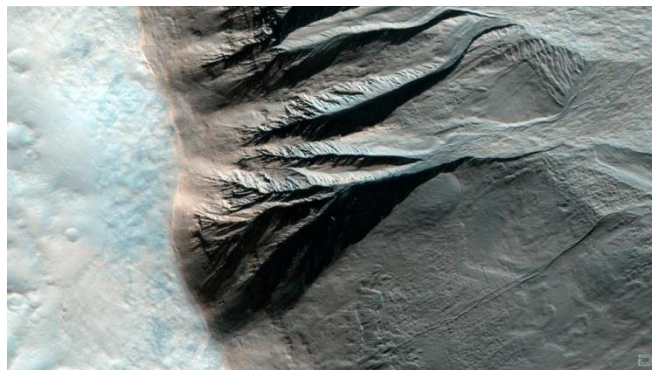
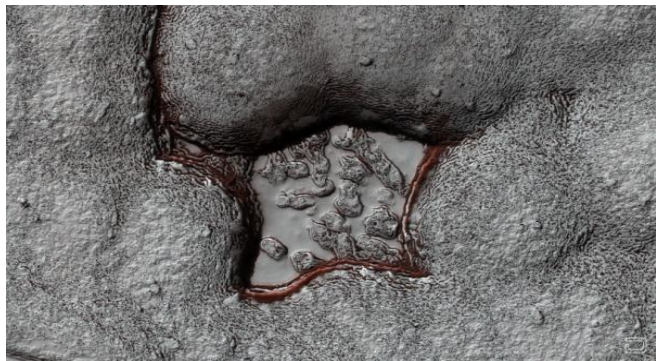


I(p)



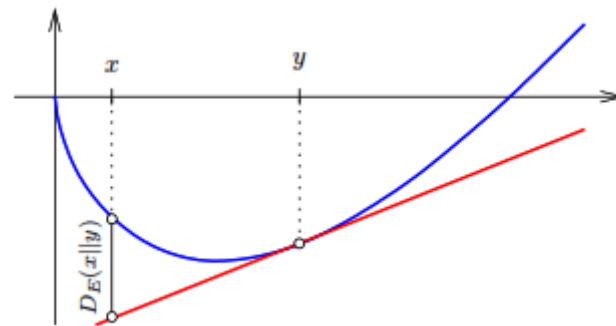
PDF

Пример: Ландшафты Марса

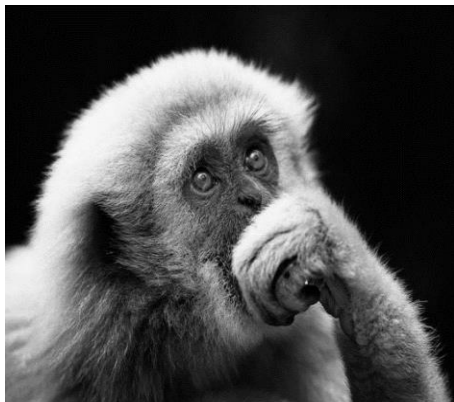


Как измерить расстояния между двумя PDF?

- [Kullback–Leibler divergence](#)
- [Jensen–Shannon divergence](#)
- [Bregman divergence \(or Bregman distance\)](#)



$$D_{\varphi}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{y}) - (\mathbf{x} - \mathbf{y})^T \nabla \varphi(\mathbf{y})$$

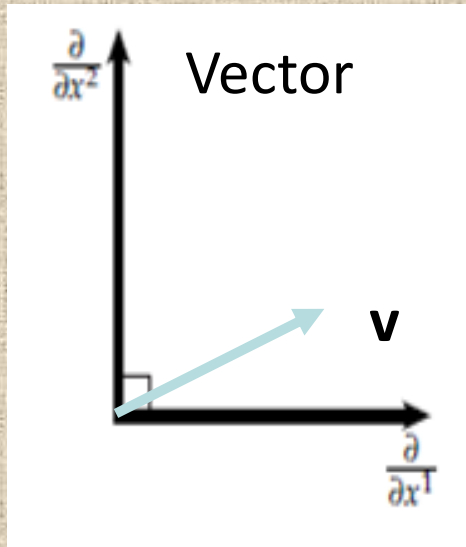


$$I_f(p, q) = \int q(x) f\left(\frac{p(x)}{q(x)}\right) dx$$

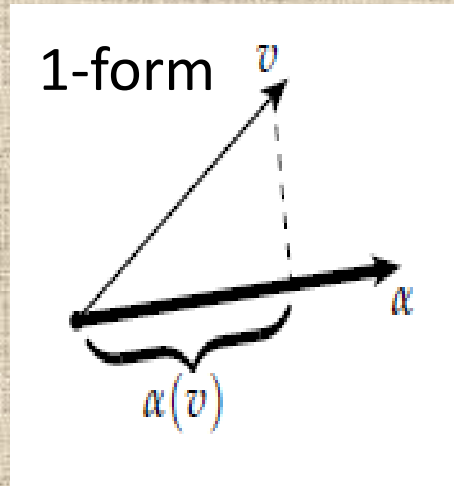
$$f(1) = 0, f'(1) = 0, f''(1) = 1.$$

Некоторые вещи из дифференциальной геометрии.

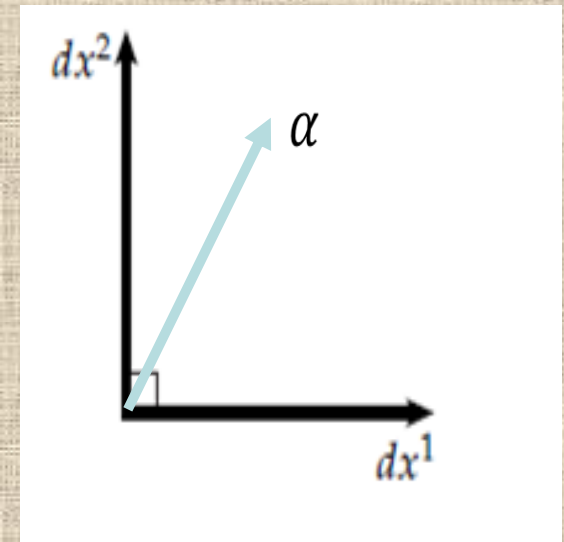
Differentials as basis vectors



$$\mathbf{v} = v^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + v^2 \frac{\partial}{\partial x^2}$$



$$dx^k \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) = \delta_i^k$$



$$\alpha(\mathbf{v}) = \alpha_1 dx^1 + \alpha_2 dx^2$$

$$\alpha(\mathbf{v}) = \alpha_i dx^i \left(v^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \alpha_i v^j$$

Метрический тензор:

$$g_{ik} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = \left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^k} \right)$$

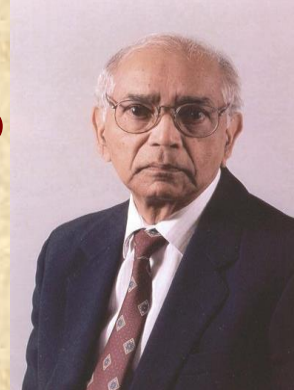


Роналд Фишер
(1890-1962)

Информационная метрика Фишера-Рао

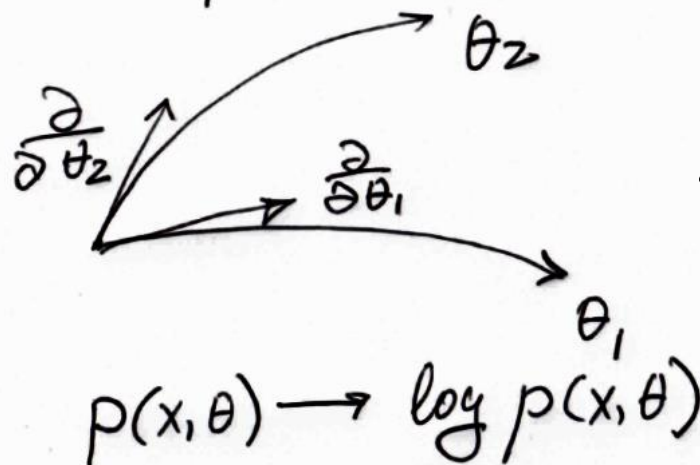
Пусть $p(x, \theta)$ – pdf, $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$

$$\int_X p(x, \theta) dx = 1$$



**Кальямпуди
Радхакришна Рао**
(1920, 99 лет)

Let $T_p X$ - tangent space



$$g_{ik} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = \left(\frac{\partial}{\partial \theta_i}, \frac{\partial}{\partial \theta_k} \right)$$

Метрический тензор

$$g_{jk}(\theta) = \int_X \frac{\partial \log p(x, \theta)}{\partial \theta_j} \frac{\partial \log p(x, \theta)}{\partial \theta_k} p(x, \theta) dx.$$

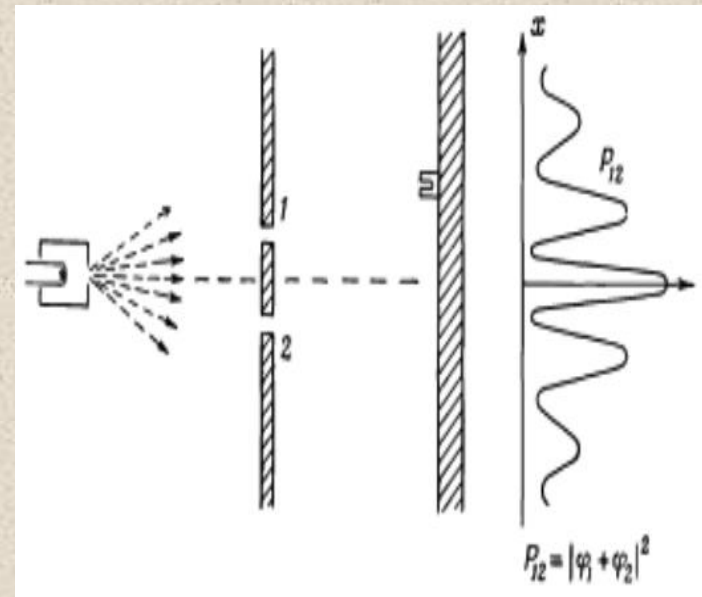
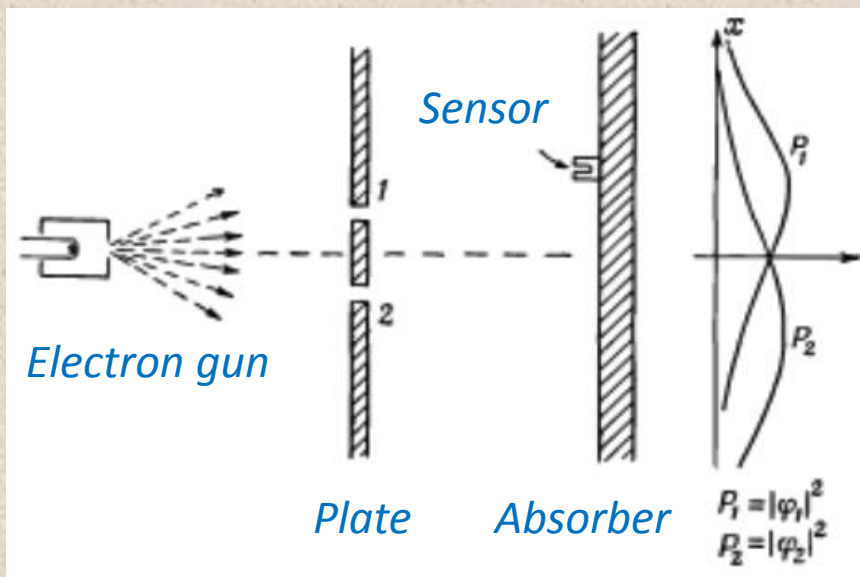
Слишком сложно для вычислений!

Квантовая эвристика: эксперимент с двумя щелями

P_i - вероятность пройти через щель $i=1,2$

P_{12} - вероятность пройти через щель или 1 либо через щель 2

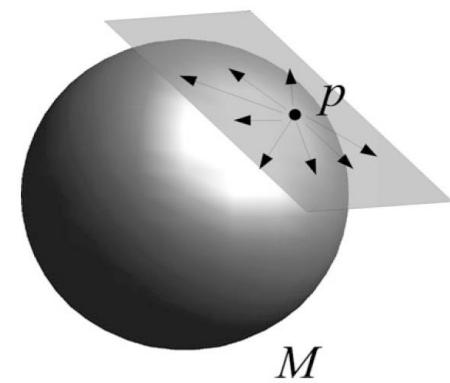
$P_{12} = P_1 + P_2$, если мы анализируем путь $P_{12} \neq P_1 + P_2$, если мы смотрим результат



$$\psi_{12} = \psi_1 + \psi_2 \quad \rightarrow \quad P_{12} = P_1 + P_2 + 2\psi_1\psi_2$$

ψ - амплитуда вероятности или полуплотность

PDF живут в Банаховом пространстве с нормой
Для измерения нужна гильбертова норма
Переселим pdf на единичную сферу!



1. Замена координат $y_i = \sqrt{p_i}; \sum_i p_i = 1 \Rightarrow \sum_i y_i^2 = 1$

2. В касательном пространстве, определим метрику Фишера-Рао:

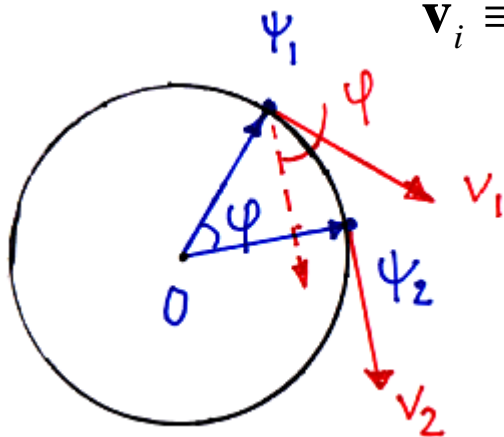
$$ds^2 = \sum_i dy_i dy_i = \sum_i d\sqrt{p_i} d\sqrt{p_i} = \frac{1}{4} \sum_i \frac{dp_i dp_i}{p_i} \sim \int \frac{\|\nabla p\|^2}{p}$$

3. И скалярное произведение:

$$(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \|\mathbf{v}_1\| \|\mathbf{v}_2\| \cos \varphi.$$

$$\varphi = \arccos \frac{(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)}{\|\mathbf{v}_1\| \|\mathbf{v}_2\|}$$

$$\mathbf{v}_i \equiv d\psi_i \equiv d\sqrt{p_i}$$



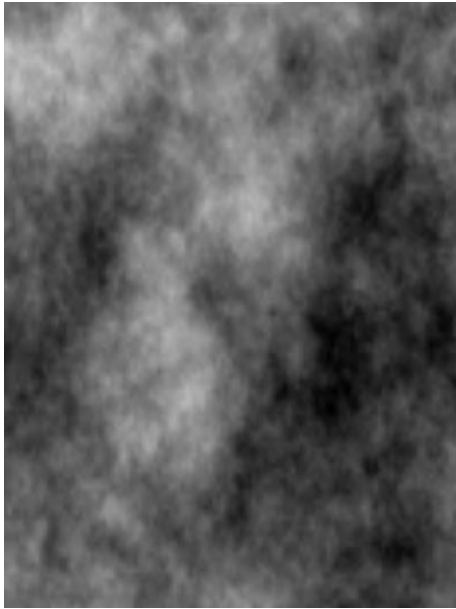
Этот угол измеряет расстояния между pdf на сфере

Models of log-normal fields

F4:

mean = 0.5

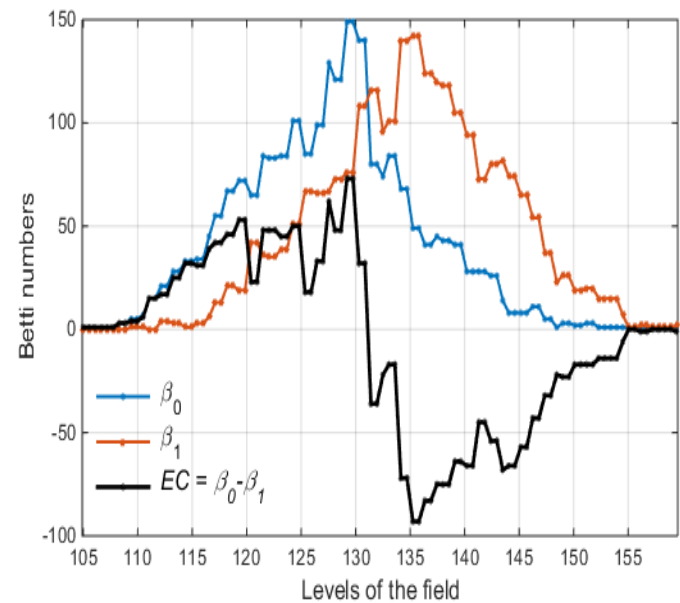
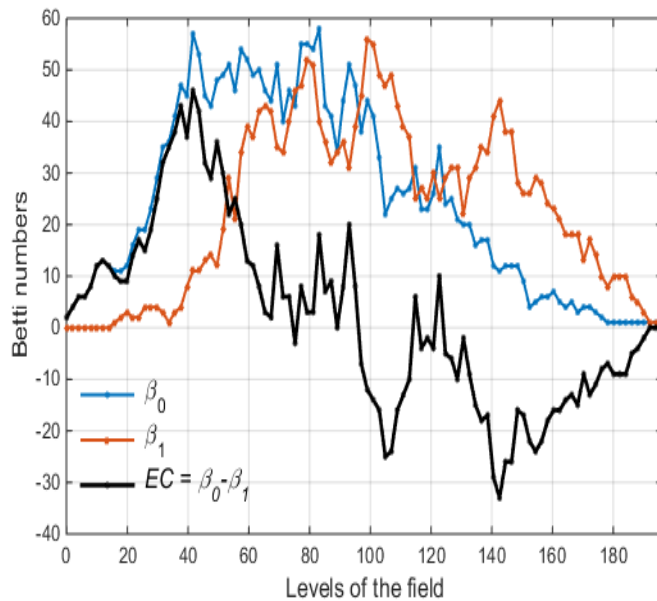
sigma = 1



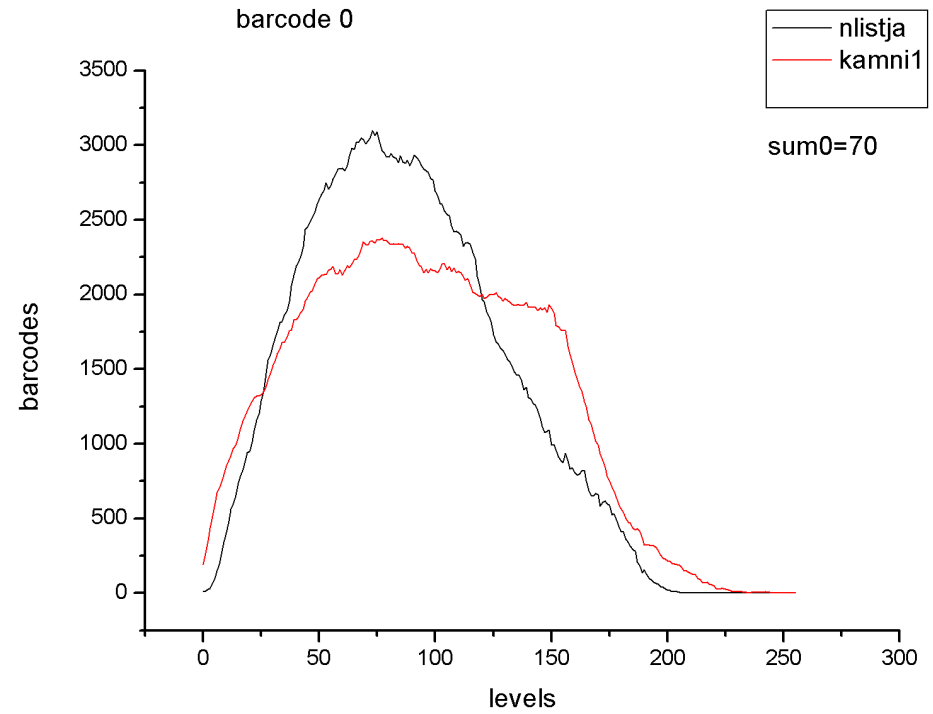
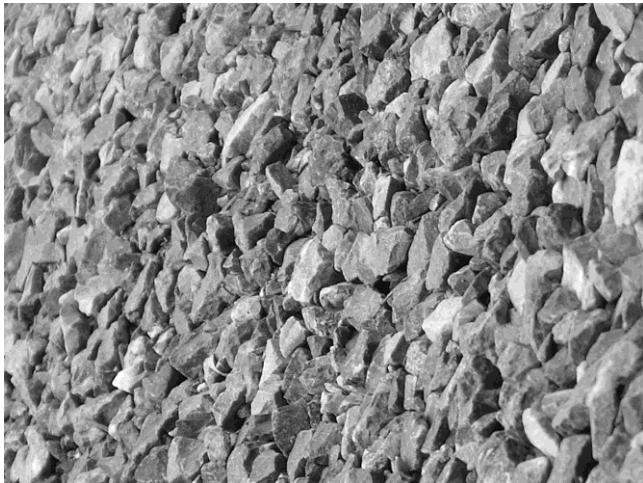
F5:

mean = 1.5

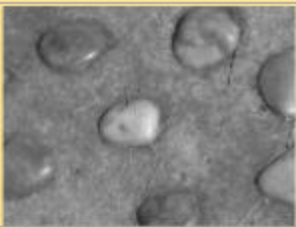



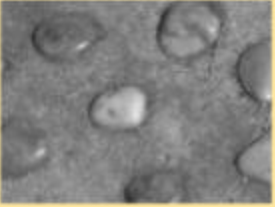
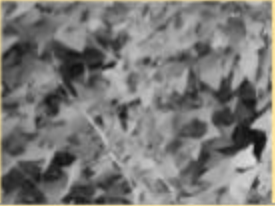


sigma = 0.5



Текстуры в ДДЗ

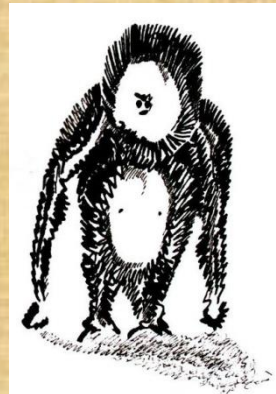
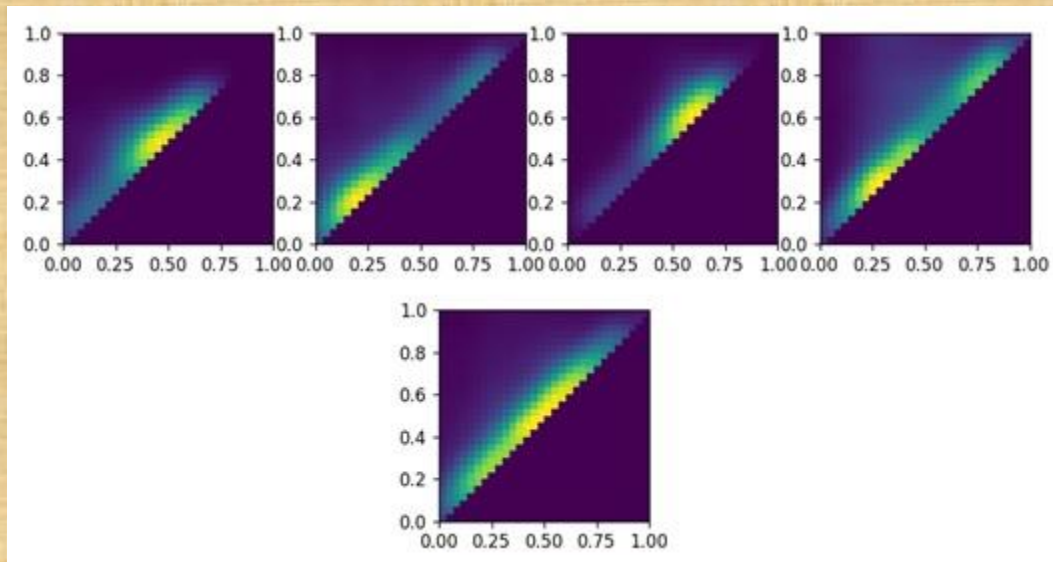
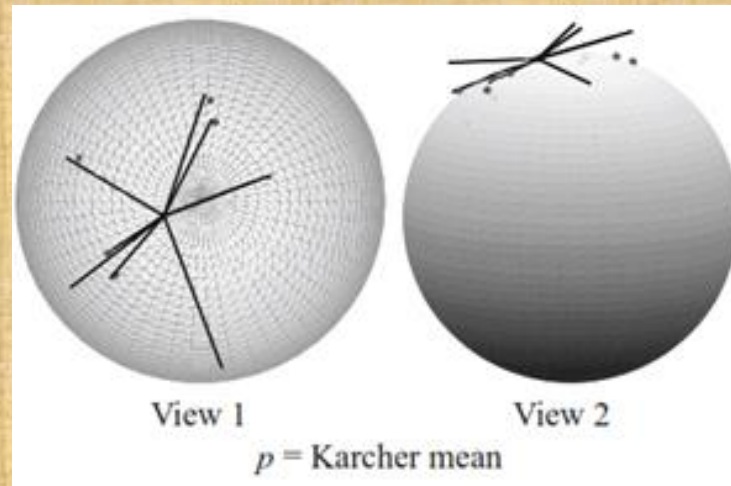


Риманова метрика и текстуры

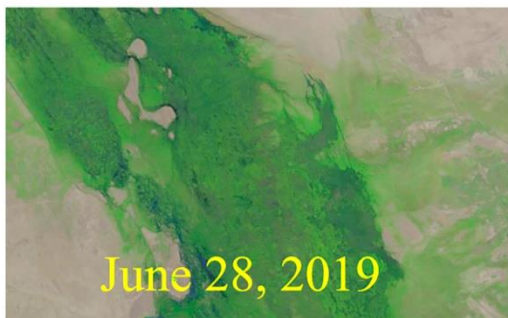
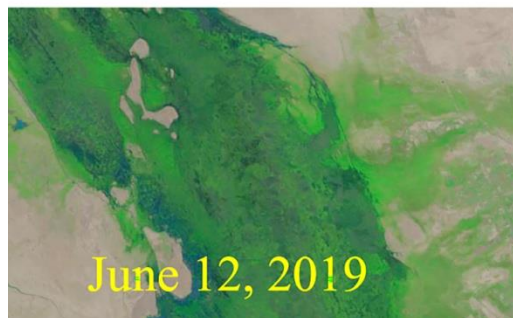
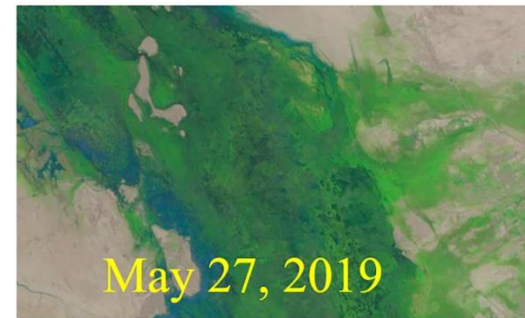
Риманово расстояние (b0,b1)				
	[0;0]	[0.61;0.42]	[0.71; 0.32]	[0.53;0.29]
		[0;0]	[0.16;0.19]	[0.24;0.19]
			[0;0]	[0.31;0.13]
				[0;0]

СРЕДНЕЕ ПО КАРЧЕРУ

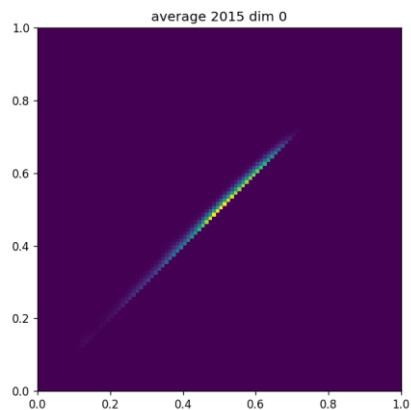
$$\rho(p) = \int_S d(p, q)^2 f(q) dq$$



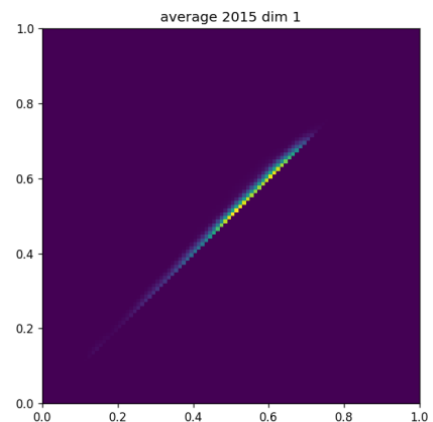
Водно-болотные угодья Хамун, бассейн Систан рек Гильменд на восточной границе Ирана



Использовались ежемесячные мультиспектральные снимки Landsat 5 и Landsat 8 (2015-2016 гг.).

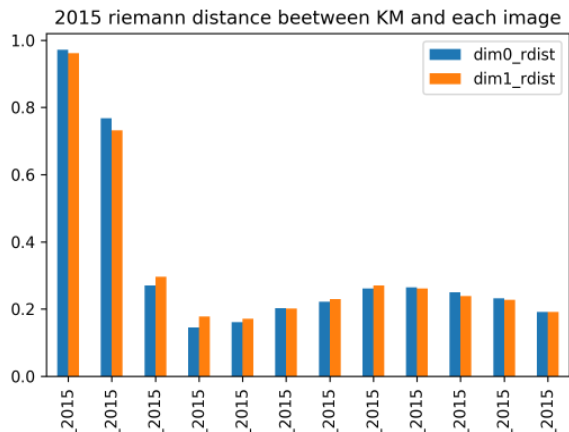


Среднее по Карчере для Бетти 0 (1915)

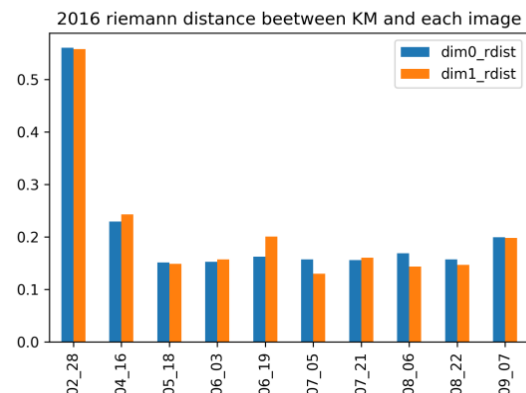


Среднее по Карчере для Бетти 1 (1915)

Вариабельность риманова расстояние относительно среднего по Карчере



2015



2016

**СПАСИБО ЗА
ВНИМАНИЕ**
ng-makar@mail.ru

