

Подход к построению трёхмерных моделей объектов земной поверхности с помощью алгебраических операций

Рихтер А.А.

НИИ "АЭРОКОСМОС", Москва, Российская Федерация

Постановка задачи

- Проведение визуального дешифрирования земной поверхности по космическим изображениям показывает, что на снимках можно наблюдать множество пространственно-временных закономерностей. Во-первых - типизация объектов, т.е. наличие некоей иерархической структуры классов, экземпляры которых имеют одинаковую геометрию, обусловленную общим составом параметров и их значениями (детерминированными для ригидных или случайными для неригидных объектов). Объекты «собираются» на географической подложке наподобие конструктора и подчиняются концепциям объектно-ориентированного программирования (понятиям, принципам, структуре класса и др.).
- Во-вторых, закономерности пространственного распределения объектов, такие как симметрирование (центральное, осевое и др.), пространственная корреляция (домов относительно дорог, автобусных остановок относительно пешеходных переходов и т.д.), случайные законы (например, нормальный закон естественного распределения деревьев на границе лес-луг). В-третьих, пространственно-временные периодические структуры, которые характеризуются: периодом – повторяющийся элемент сцены, с варьированием размеров, наклонов и положений; частотой – число повторений в тех или иных направлениях и подобластях; точкой отчёта – начала периодических структур; композицией – один период включает другой (или другие); случайностью - отклонения от детерминированного распределения.
- Для удобства представления пространственно-временных закономерностей можно применить язык алгебры над геометрическими объектами, посредством которого возможно трёхмерное и вообще многомерное моделирование, автоматизация и программирование объектов, в том числе участков земной поверхности по данным космического и подспутникового мониторинга.

Земная поверхность как конструктор типизированных объектов



Изображение объектов земной поверхности преимущественно одного прототипа (высотные многоквартирные дома) [Яндекс-карты]

Общие положения

- Представление модели поверхности Земли в виде конструктора, состоящего из типизированных элементов (иерархии классов деревьев, домов, водоёмов и т.д.);
- Построение трёхмерной модели сцены с применением:
 - Методик восстановления трёхмерных моделей ригидных объектов по плоским изображениям (по стереопаре, тени и освещённости, эталонам, сеткам и др.);
 - Имитации, предположения трёхмерных моделей (плохо восстанавливаемые или неригидные объекты);
 - Радиолокационных изображений (форма самой поверхности);
 - Программ (трёхмерное моделирование – Sketch Up, Revit и др.; геометрическое программирование – OpenGL; визуализация сцены – Яндекс- и Google-карты, Google Earth; бэкенд калькулятора – Python);
 - Геоинформационного моделирования внутренности трёхмерных моделей объектов (например, геоинформационное пространство зданий больниц, поликлиник, школ и т.д.).

Подход к автоматизации геометрического моделирования

«Алгебра многомерных геометрических объектов»

Глава 1. Геометрические объекты и операции над ними

1.1. Основные понятия (геометрические объекты, характерные объекты, алгебраические формулы, тождества и функции объектов, изменения объектов во времени, многомерные объекты и др.),

1.2. Алгебраические операции над геометрическими объектами (сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в степень, разложение на множители, умножение на коэффициент и функцию, умножение объектов, сеточное умножение и др.),

1.3. Случайная геометрия (случайные геометрические величины, случайные объекты и случайное распределение объектов, случайные объекты на изображениях и их модели);

Глава 2. Программирование земной поверхности

2.1. Прототипы объектов земной поверхности (ригидные и неригидные объекты, классификация объектов, алгебраические модели реальных объектов, типизация и генерация объектов, изменение объектов земной поверхности во времени),

2.2. Программирование области наблюдения (изображения области наблюдения и их структурный анализ, алгебраические модели и программные блоки типовых объектов и участков земной поверхности, геокодирование и геопривязка объектов, внешняя и внутренняя геоинформационная модель, разработка макета программного комплекса, программный модуль интерактивных карт);

...



Основные операции над геометрическими объектами

Алгебраическое пространство: $\chi = \{E^{n-}, E^{n+}, \theta\}$

E^{n-} и E^{n+} – отрицательное и положительное n-мерные евклидовы пространства для исчисления объектов, θ – сингулярность, $n=3$

1. Сложение (вычитание) объектов: $C=A \pm B$

Некоторые свойства операции сложения (вычитания) объектов:

$A+B=B+A$; $A+O=A$; $(A+B)+C=A+(B+C)$; $A+B=C \Rightarrow B=C-A, A=C-B$;

$A-O=A, O-A=-A$; $O=A-A=A+(-A)$; $A=-(-A)$; $A-B=A+(-B)=-B+A$

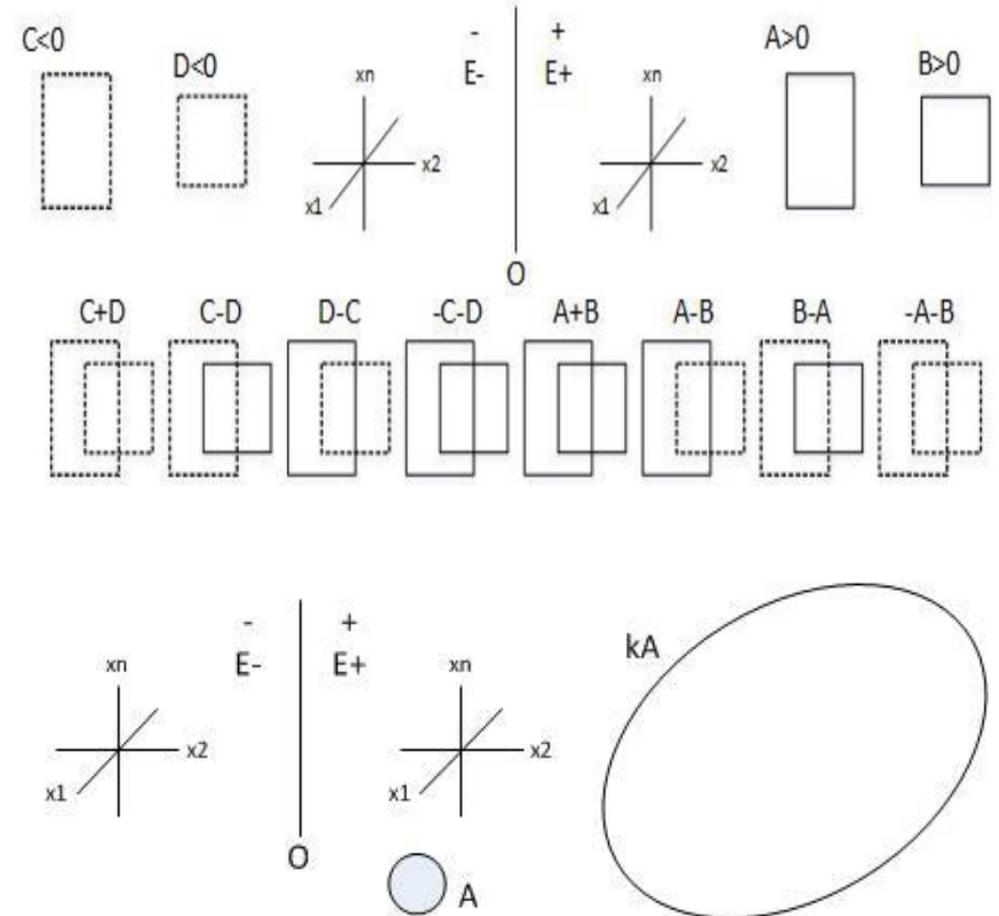
A, B, C, D – объекты, O – нулевой объект, I – единичный объект

- Модуль от объекта
- Унарный плюс (минус)

2. Умножение объекта на коэффициент: $C=kA, D=A/k$

$k=\{s,a,d\}$ – коэффициент, $s=[s_1 \dots s_n]$ – растяжение, $a=[a_1 \dots a_n]$ – поворот, $d=[d_1 \dots d_n]$ – сдвиг, $n'=n(n-1)/2$

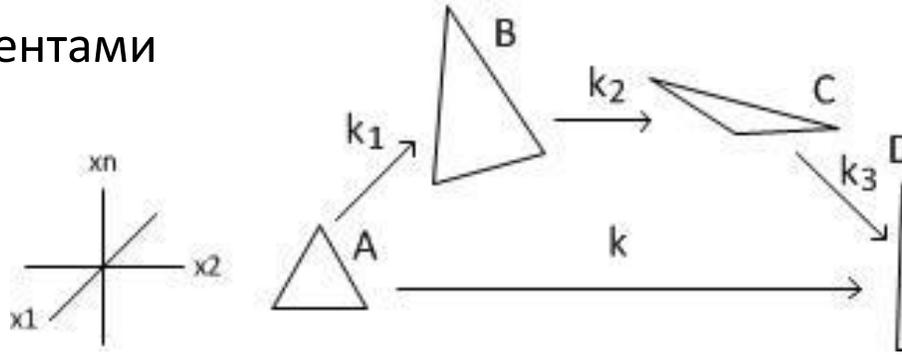
- Представление многообразия kA форм, поворотов и положений объекта A
- Симметрирование (центральная, осевая, зеркальная и др.)
- Преобразование систем координат и их цепочек



Основные операции над геометрическими объектами

3. Основные операции над коэффициентами

- Сложение: $m=k+l$
- Вычитание: $m=k-l$
- Умножение: $m=kl, pk, kp$
- Деление: $m=k/l, k/n, n/k$
- Возведение в степень: $m=k^l, k^n$
- Разложение на коэффициенты-сомножители: $k=k_1^*k_2^*\dots*k_r$



$$\begin{aligned} B &= k_1 A \\ C &= k_2 B \\ D &= k_3 C \\ D &= k A \\ k &= k_3 k_2 k_1 \end{aligned}$$

Некоторые свойства операции умножения на коэффициент:

$$\begin{aligned} k(A+B) &= kA+kB; \quad k(A*B) = (kA)*(kB); \quad (k+l)A = kA+lA; \quad (kl)A = k(lA); \quad kl \neq lk; \quad k=1k, \\ \mathbf{0} &= \mathbf{0}k, \quad \mathbf{0}A = \mathbf{0}; \quad \mathbf{1}A = A; \quad kA = kB \Leftrightarrow A = B; \quad kA = lA \Leftrightarrow k = l; \quad kk^{-1} = \mathbf{1}, \quad k^p k^q = k^{p+q}, \\ \mathbf{0} &= \{0,0,0\}, \quad \mathbf{1} = \{1,0,0\} \end{aligned}$$

$k, k_j, l, m, \mathbf{1}, \mathbf{0}$ – коэффициенты, p, q – числа, A, B, C, D – объекты

Разложение $k=k_1 k_2 k_3$ на

- растяжение $k_1 = \{s, 0, 0\}$:
- вращение $k_2 = \{1, a, 0\}$:
- сдвиг $k_3 = \{1, 0, d\}$:

$$k_1 = \prod_{j=1}^l k_{1j}, \quad k_1 = \{s, 0, 0\}, \quad k_{1j} = \{s_j, 0, 0\}, \quad s = \prod_{j=1}^l s_j$$

$$k_2 = \prod_{j=1}^l k_{2j}, \quad k_2 = \{1, a, 0\}, \quad k_{2j} = \{1, a_j, 0\}, \quad a = \sum_{j=1}^l a_j$$

$$k_3 = \prod_{j=1}^l k_{3j}, \quad k_3 = \{1, 0, d\}, \quad k_{3j} = \{1, 0, d_j\}, \quad d = \sum_{j=1}^l d_j$$

Пример тождественного преобразования (приведение к общему центру):

$$\begin{aligned} k_A A + k_B B &= k[k'_A A + k'_B B] \\ k^{-1}[k_A A + k_B B] &= k^{-1}k[k'_A A + k'_B B] \\ k^{-1}k_A A + k^{-1}k_B B &= k'_A A + k'_B B \\ k^{-1}k_A A + k^{-1}k_B B - k'_A A - k'_B B &= \mathbf{0} \\ (k^{-1}k_A - k'_A)A + (k^{-1}k_B - k'_B)B &= \mathbf{0} \\ k^{-1}k_A - k'_A = 0, \quad k^{-1}k_B - k'_B = 0 \\ \Rightarrow k'_A &= k^{-1}k_A, \quad k'_B = k^{-1}k_B \end{aligned}$$

Основные операции над геометрическими объектами

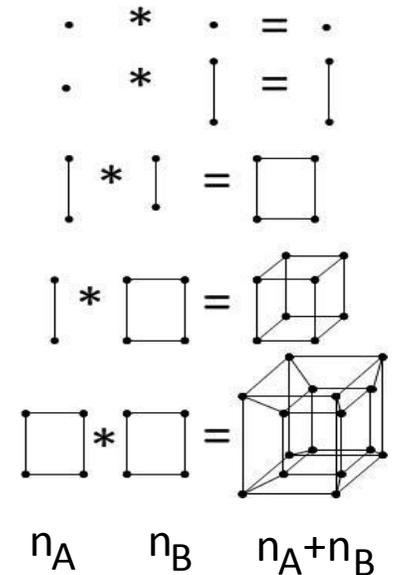
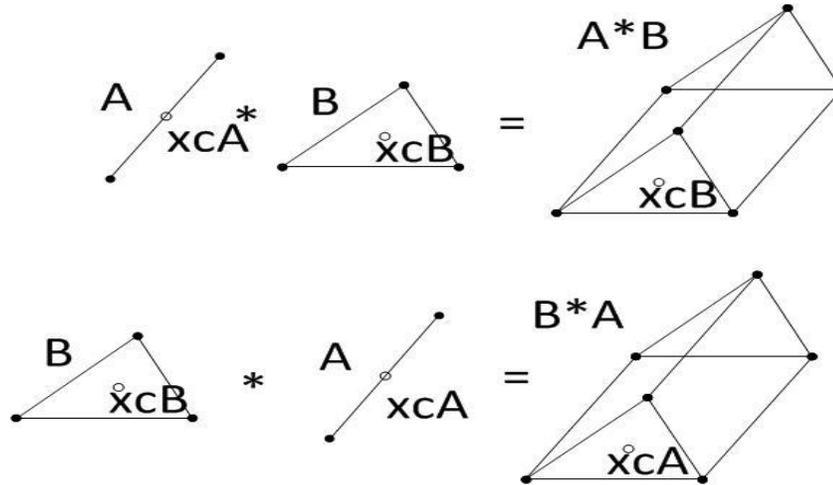
4. Умножение объектов: $C=A*B$

Некоторые свойства операции умножения объектов:

$$A*B=k(B*A); (A*B)*C=A*(B*C); I*A=A*I=A;$$

$$O*A=A*O=O; A*(B+C)=A*B+A*C;$$

$$(A+B)*C=A*C+B*C$$



5. Деление объектов:

$$A/B=\{k,C, D\}, A=(kC)B+D$$

- Деление с остатком и без остатка
- Деление по модулю
- НОК и НОД
- Разложение объекта на множители
- Разложение по базису

6. Разложение объектов A и B по базису e:

$$A = ke^T = \sum_{i=0}^{n_A} k_i e^i, B = le^T = \sum_{j=0}^{n_B} l_j e^j$$

$$AB = me^T = \sum_{r=0}^n m_r e^r, m_r = \sum_{r=i+j} k_i l_j$$

$e = [e_1 \ e_2 \ \dots \ e_n]$ - базис разложения (e_i - i -мерный тетраэдр)
 $n = n_A + n_B$

n_A и n_B - мерность объектов-сомножителей A и B

n_A+n_B - мерность объекта-произведения AB

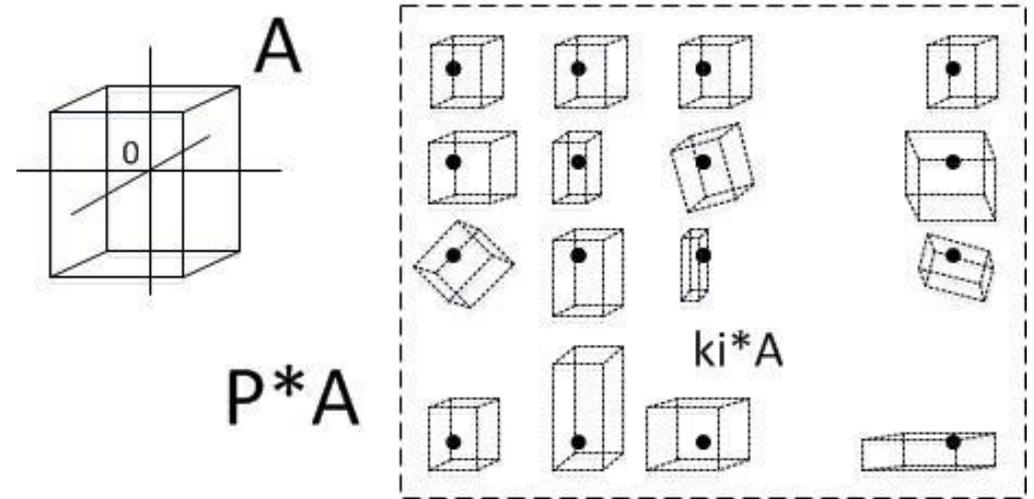
Основные операции над геометрическими объектами

7. Сеточное умножение: $C = PA$ $P = \sum_{i=1}^r k_i, k_i = \{s^i, a^i, d^i\}$

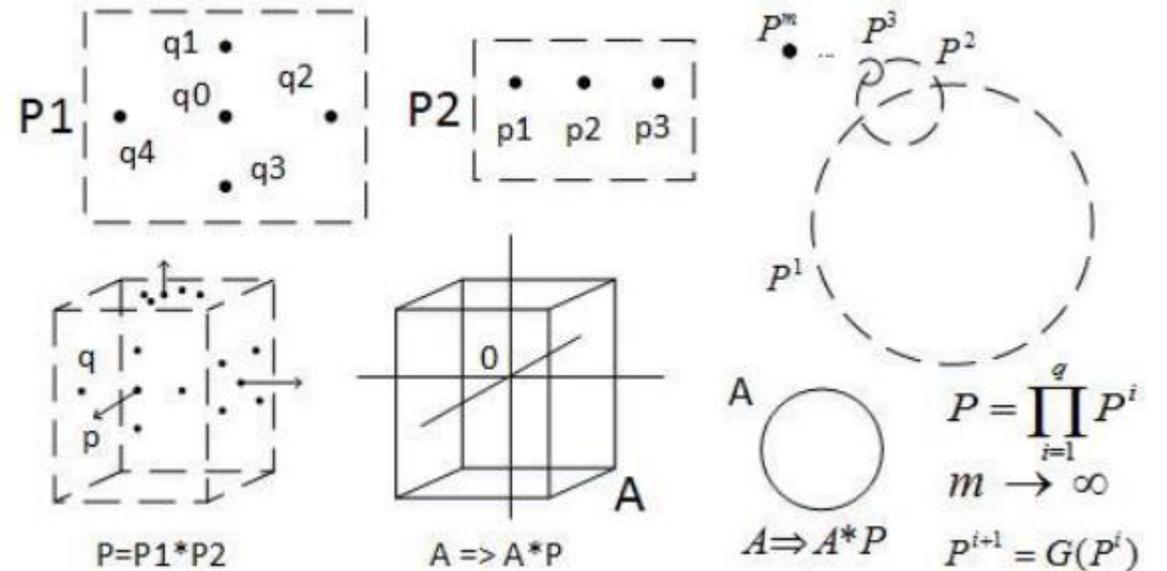
P, P^j - сетки (коэффициенты)

Сеточное умножение даёт периодические структуры объектов и сцен, которые характеризуются:

- Периодом – повторяющийся элемент сцены, с варьированием размеров, наклонов и положений
- Частотой – числом повторений в тех или иных направлениях и подобластях
- Точкой отчёта – начала периодической структуры
- Кратностью – простые периодические структуры, на которые раскладывается данная (композиция сеток)
- Отклонениями от детерминированного распределения – характеристиками случайных алгебраических или геометрических величин, регулирующих отклонение поведения сцены от периодического



Линейное распределение объектов



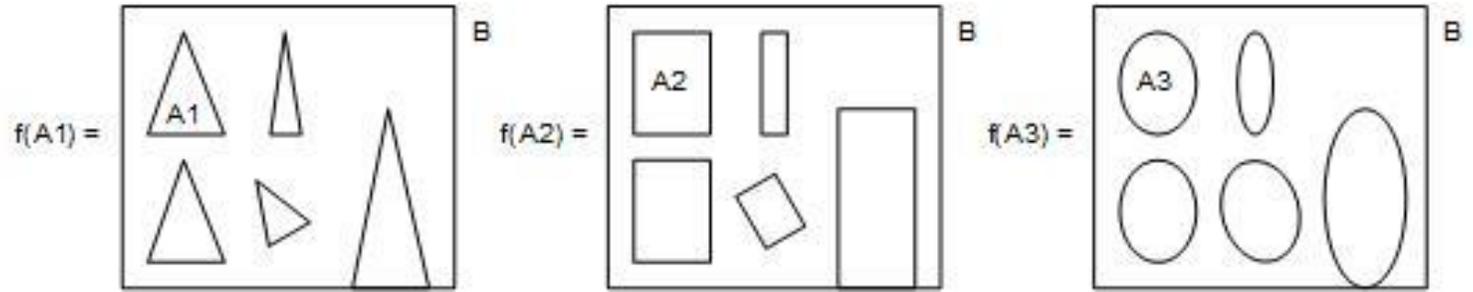
Композиция сеток

Фракталы

Основные операции над геометрическими объектами

8. Функции

- От времени, от объектов
- Периодические, непрерывные и дискретные
- Бесконечные и ограниченные, рекурсивные и циклические и т. д.

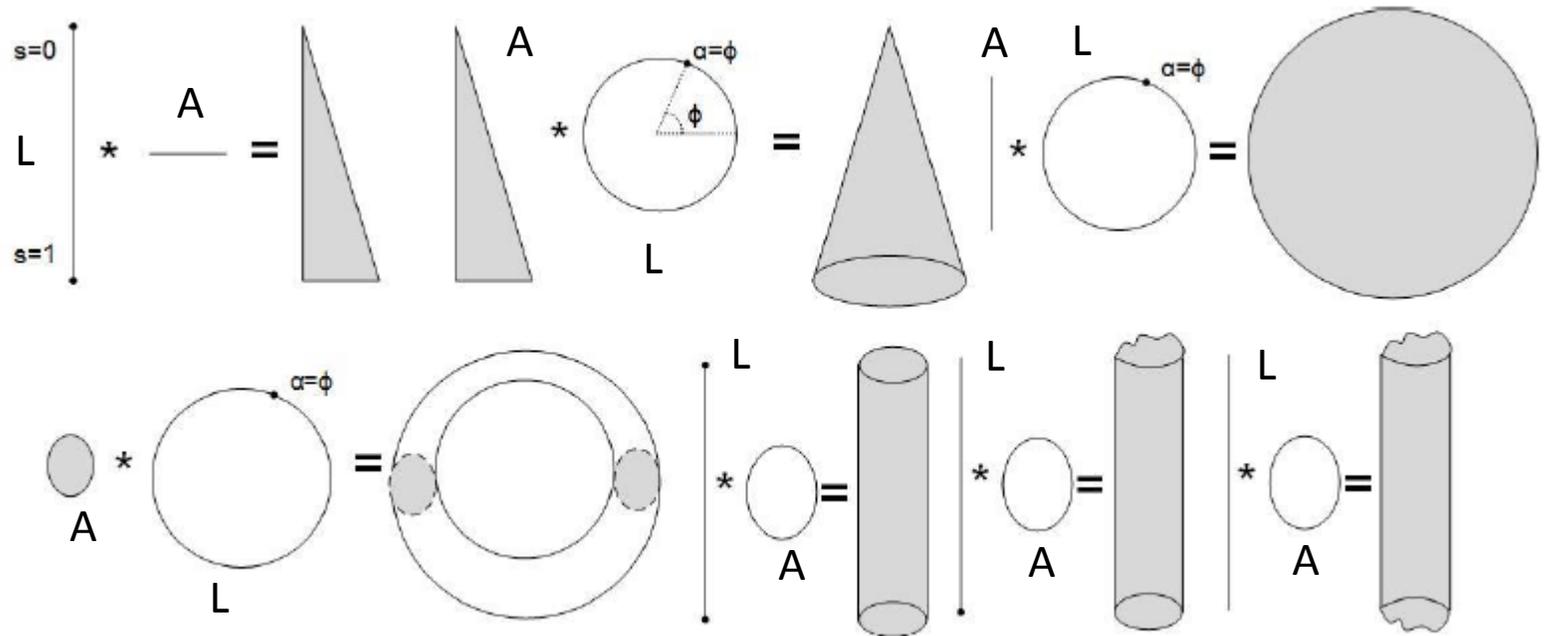


Функция $f(A)=A * P+B$ при $A=A_1, A_2, A_3$

Пример. Модель движения планет Солнечной системы:

$$SS(t) = S + \sum_{i=1}^a k_i(t)A_i + \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^{b_i} l_{ij}(t)k_i(t)B_{ij}$$

S – Солнце, $\{A_i\}$ – планеты, $\{B_{ij}\}$ – спутники планет, $k_i(t)$ – законы движения планет относительно Солнца, $k_{ij}(t)$ – спутников относительно планет, ...



Произведение $L * A$ линии $L=k(q), 0 \leq q \leq 1$ на объект A

Пример алгебраической модели объектов земной поверхности

Алгебраическая модель здания:

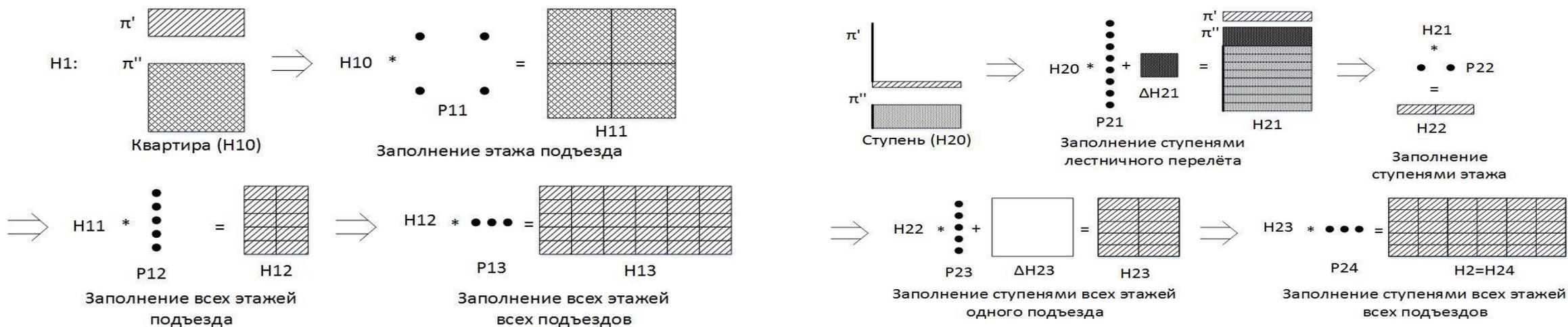
$$H = \sum_{i=1}^m H^i, \quad H_j^i = H_{j-1}^i * P_j^i + \Delta H_j^i, \quad j = 0..m_i, \quad H^i = H_{m_i}^i, \quad P^i = \prod_{j=1}^{m_i} P_j^i$$

m – число подсистем,

H_0^i и m_i – конечный элемент и глубина разложения i -й подсистемы



ΔH_j^i – объекты-невязки, P_j^i – сетки, H_j^i – периодические элементы



Подсистема Квартиры ($H^1, i=1$)

Подсистема Лестницы ($H^2, i=2$)



Подсистема Крыша ($H^3, i=3$)

Библиотеки функций по алгебраической обработке геометрических объектов

- Генерация объектов: характерные объекты (нулевой O , единичный E объекты и др.), стандартные (отрезки, лучи, треугольники, шары, цилиндры и т.д.) и нестандартные (кольца, торы, звезды и т.д.) 1D-4D объекты; шаблоны сложных объектов (модели зданий, деревьев, дорог и т.д.); генерация объектов – по структурной и цветовой матрице; во времени (тренд-циклические и случайные изменения); >4D-размерности и др.;
- Алгебраические операции: сложение, вычитание, умножение и деление объектов; разложение объекта на множители, возведение в степень, умножение на коэффициент, сеточное умножение, умножение сеток; умножение констант и др.; преобразования объектов (гомотетия, симметрия, трансляция и др.); работа с сетками; работа с массивами объектов; работа с функциями от объектов; работа с геометрическими множествами; работа с геометрическими уравнениями; работа со структурными и цветовыми матрицами объектов; работа с многомерными объектами и др.

Также имеют место библиотеки: обработка многомерных объектов; работа с топологией объектов; работа с объектами в динамике; работа со случайными объектами; дифференцирование и интегрирование объектов.

Примеры методов и операций алгебры объектов, Python

```
# сложение объектов
def addf(f1,f2):
    f=F()
    if isinstance(f1,F) and isinstance(f2,F):
        l1=len(f1.k)
        q=cop(f2)
        v=[]
        for i in range(l1):
            l=len(q.k)
            for j in range(l):
                if f1.id[i]==q.id[j]:
                    if eq_(f1.k[i],q.k[j]) and not (f1.w[i]==q.w[j]):
                        q.id.pop(j)
                        q.k.pop(j)
                        q.w.pop(j)
                        v.append(i)
                        break
        v=copy.deepcopy(set(range(l1)).difference(v))
        f.id=[f1.id[i] for i in v]+q.id
        f.k=[f1.k[i] for i in v]+q.k
        f.w=[f1.w[i] for i in v]+q.w
        if f.k==[]:
            f.w=[]
    return f
```

Сложение объектов

```
# вычитание объектов
def subf(f1,f2):
    f=F()
    if isinstance(f1,F) and isinstance(f2,F):
        l1=len(f1.k)
        q=cop(f2)
        v=[]
        for i in range(l1):
            l=len(q.k)
            for j in range(l):
                if f1.id[i]==q.id[j]:
                    if eq_(f1.k[i],q.k[j]) and f1.w[i]==q.w[j]:
                        q.id.pop(j)
                        q.k.pop(j)
                        q.w.pop(j)
                        v.append(i)
                        break
        v=copy.deepcopy(set(range(l1)).difference(v))
        f.id=[f1.id[i] for i in v]+q.id
        f.k=[f1.k[i] for i in v]+q.k
        f.w=[f1.w[i] for i in v]+[not q_ for q_ in q.w]
        if f.k==[]:
            f.w=[]
    return f
```

Вычитание объектов

```
# умножение коэффициента на коэффициент
def mulk(k1,k2):
    k=K()
    k.w=[]
    l1=len(k1.k)
    l2=len(k2.k)
    for i in range(l1):
        if k1.k[i]==1:
            k.k.extend(k2.k)
            if k1.w[i]:
                k.w.extend(k2.w)
        else:
            v=[not k2.w[z] for z in range(l2)]
            k.w.extend(v)
    else:
        for j in range(l2):
            if k2.k[j]==1:
                k.k.append(k1.k[i])
                if k2.w[j]:
                    k.w.append(k1.w[i])
            else:
                k.w.append(not k1.w[i])
        else:
            k_=[]
            k1_=k1.k[i][0]
            k2_=k2.k[j][0]
            l1=len(k1_)
            l2=len(k2_)
            l1=max(l1,l2)
            q1=k1_+[1]*(l1-l1)
            q2=k2_+[1]*(l1-l2)
            k_.append(list(np.array(q1)*np.array(q2)))
            k1_=k1.k[i][1]
            k2_=k2.k[j][1]
            l1=len(k1_)
            l2=len(k2_)
            l1=max(l1,l2)
            q1=k1_+[0]*(l1-l1)
            q2=k2_+[0]*(l1-l2)
            k_.append(list(np.array(q1)+np.array(q2)))
            k1_=k1.k[i][2]
            k2_=k2.k[j][2]
            l1=len(k1_)
            l2=len(k2_)
            l1=max(l1,l2)
            q1=k1_+[0]*(l1-l1)
            q2=k2_+[0]*(l1-l2)
            k_.append(list(np.array(q1)+np.array(q2)))
            k.k.append(k_)
            k.w.append(k1.w[i]==k2.w[j])
    return k
```

*Умножение
коэффициентов*

Примеры простейших геометрических программ над операцией умножения

1. Умножение объекта на коэффициент
(распределения объекта разных размеров и положений в пространстве)

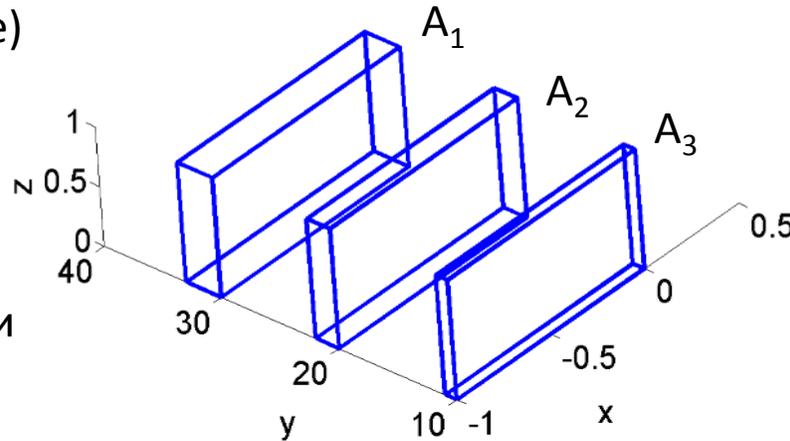
$$A=I^3$$

$$A_1=k_1A$$

$$A_2=k_2A$$

$$A_3=k_3A$$

$\{k_i\}$ – коэффициенты (сдвиг и масштабирование), I – единичный отрезок, $k_1=1$



```
f=F(1)
k1=K([1, [0, 90], 0])
k2=K([1, [0, 0, 90], 0])
f=f*(k1*f)*(k2*f)
n=3
a=[0, 0, 90]
r=range(n)
g=0()
for i in r:
    r_=r[i]
    k=K(r_, a, [0, 10*r_])
    A(i)=k*f
    g=g+A(i)
fg(g)
```

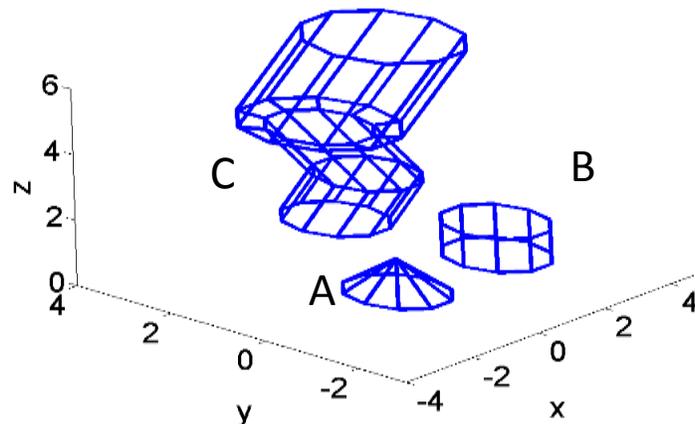
2. Умножение объекта на линию (труба с переменным сечением)

$$A=r*I_a$$

$$B=r*I_b$$

$$C=r*I_c$$

r – единичная окружность,
 I_a, I_b, I_c - линии



```
k1=[[1, 0], 0, [[0]*3, [0, 0, 1]]]
k2=[1, 0, [[3, 0, 0], [3, 0, 1]]]
k3=[[ [1]*3 + [1.5]*2 ], 0, [[1, 2, 1]] + [[2]*3] +
    [[2, 3, 3]] + [[2, 3, 3.1]] + [[4, 3, 5]]]
l=L(k1, k2, k3)
f=F(10)
A=l[0]*f
B=l[1]*f
C=l[2]*f
g=A+B+C
fg(g)
```

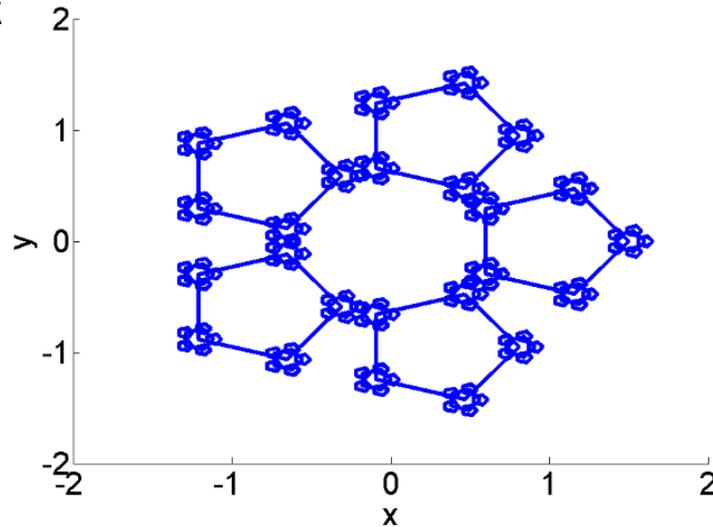
Python, K() – класс коэффициентов, L() – функций, F() - объектов

Примеры простейших геометрических программ над операцией умножения

3. Умножение объекта на сетку точек (фрактальные структуры)

$$A = r * \sum_{i=1}^m \prod_{j=1}^i P_j$$

r – фрактальная единица (единичная окружность), m – глубина фрактала, $\{P_j\}$ – сетки



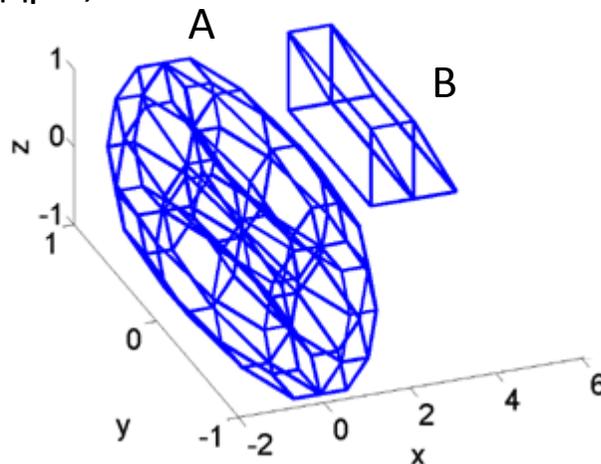
```
s=[0.5,0.1,0.05]
a=0
r=F(5)
m=3
A=r
for i in range(m):
    d=A.x
    k=[s[i],a,d]
    A=A+A*k
fg(A)
```

4. Умножение объекта на объект (цилиндры, призмы, параллелепипеды и т.д.)

$$A=a' * a''$$

$$B=l' * (g' + f')$$

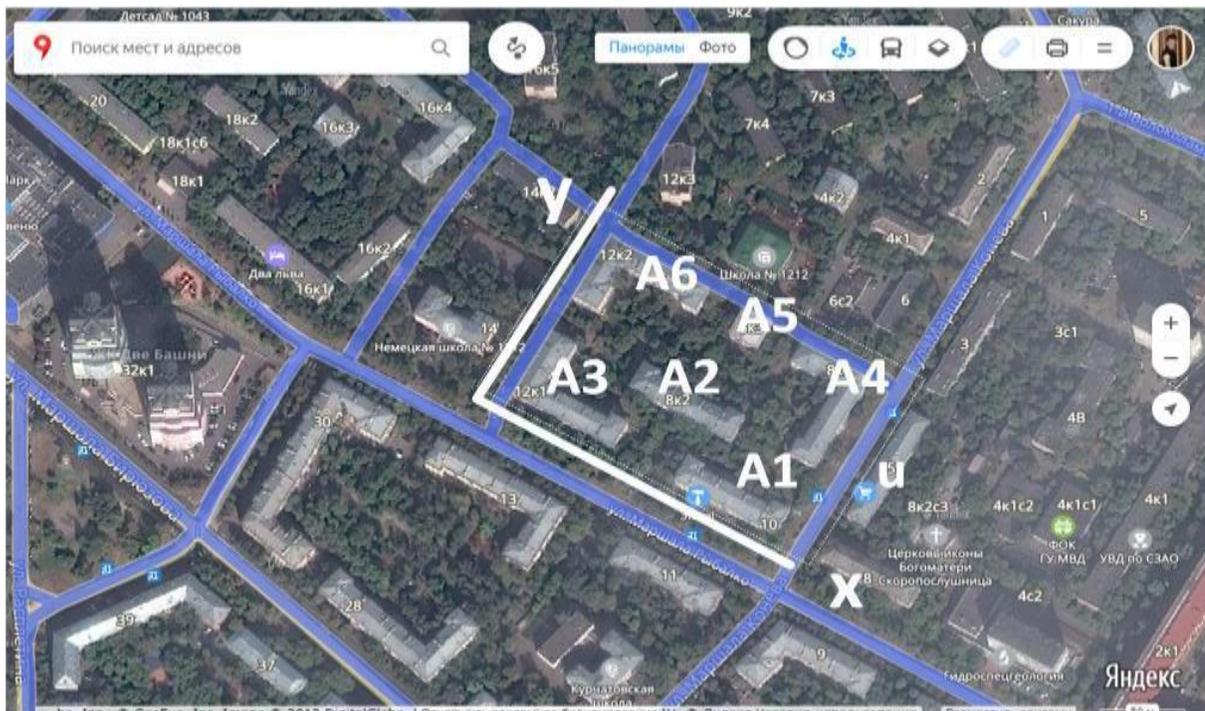
a' и a'' – n -угольники ($n=10$), l' – отрезок, g' – прямоугольник, f' – треугольник



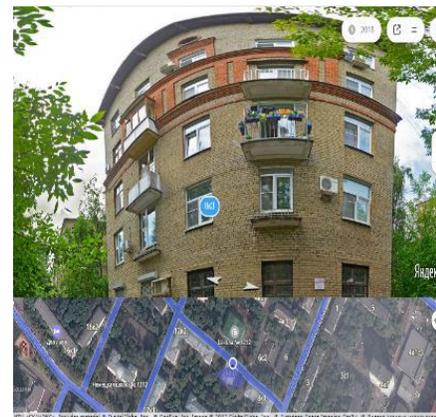
```
f=F(10)
k=[1,90,0]
A=f*(k*f)
l=F(1)
g=F(3)
k1=[1,90,[5,1]]
k2=[1,90,[6,1]]
k3=[1,[0,0,90],0]
B=(f*k1+g*k2)*k3*1
fg(A+B)
```

Python, $K()$ – класс коэффициентов, $L()$ – функций, $F()$ – объектов

Пример программирования участка земной поверхности



Область программирования, г. Москва, м.
Панфиловская, ул. Маршала Рыбалко
(космическое изображение, Яндекс-карты)



Объект 5 (панорамное
изображение, Яндекс-
карты)

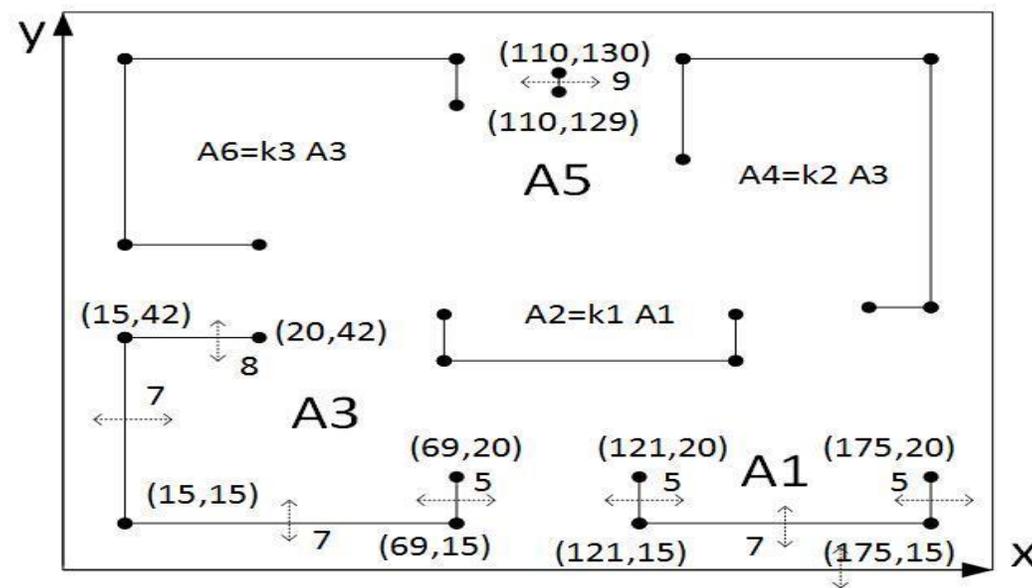
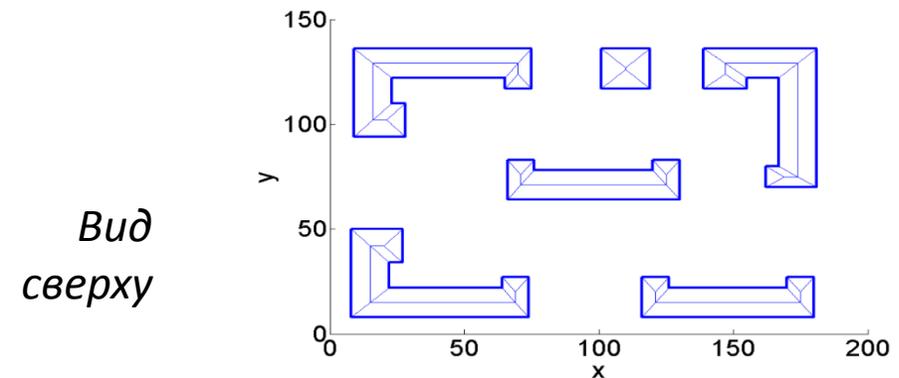
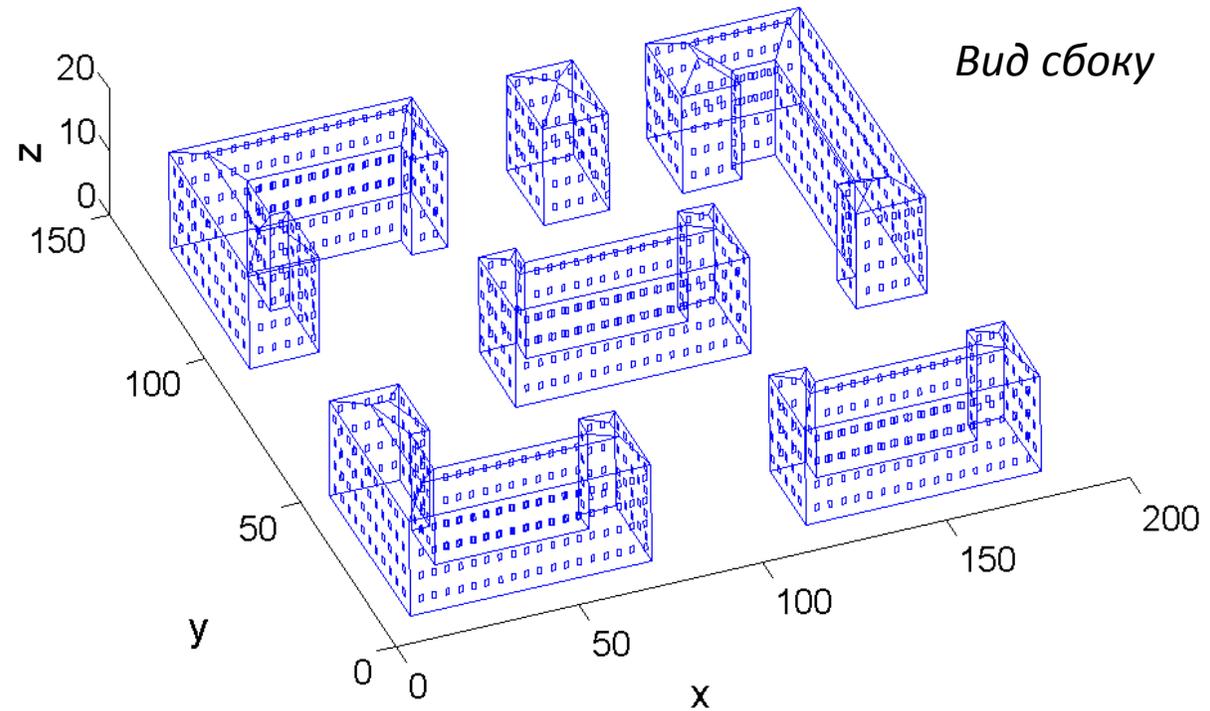


Схема модели в
размерах

Пример программирования участка земной поверхности

```
l1=[[ [121,121],[20,15]],  
      [121,175],[15,15]],  
      [175,175],[15,20]]  
l2=[[ [20,15],[42,42]],  
      [15,15],[42,15]],  
      [15,69],[15,15]],  
      [69,69],[15,20]]  
l3=[[110,110],[130,129]]  
# l1,l2,l3 - линии направляющих  
r1=[5,7,5]  
r2=[8,7,7,5]  
r3=[9]  
# r1,r2,r3 - коэффициенты образующих  
k1=K([1,0,[-50,56]])  
k2=K([1,[90,0,270],[189,144]])  
k3=K([1,90,[1,144]])  
A[1]=L(l1,r1)  
A[2]=k1*A[1] # сдвиг A[1]  
A[3]=L(l2,r2)  
A[4]=k2*A[3] # осевая симметрия, поворот и сдвиг A[3]  
A[5]=L(l3,r3)  
A[6]=k3*A[3] # осевая симметрия A[3]  
p,q=F(2),F(3)  
wx,wy,dx,dy,h=1,1,2,3,3  
# wx, wy - размеры окна, dx,dy - шаг сетки окон  
q1=K([1,h])*q # h - высота крыши  
q2=K([1,h],[0,0,180],0)*q  
q=q1+q2 # сечение крыши  
g=A*(p+q) # стены и крыши зданий  
dg=g-A*q # стены зданий  
f=F(1)*K([1,90]) # вертикальный отрезок  
c=dg/f # контур основания  
w=F(2)*K([wx,wy],[0,0,90]) # окно  
r=P(c,[dx,dy])*w # построение сетки  
fg(g+c)
```



Выводы

- В работе приведены основные алгебраические операции над геометрическими объектами (сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в степень, разложение на множители и т.д.), объекты описываются алгебраическими формулами. Написанием скриптов программ (через линейные и циклические операторы, сценарии, функции и др.) строятся объекты различной сложности, от квадратов до деревьев и домов и их массивов (лесомассивы, жилые комплексы), и мерности (например, многогранники n -й степени). Объекты различной сложности могут быть приближены алгебраическими формулами с той или иной степенью приближения.
- Подход многомерного геометрического программирования на базе алгебры геометрических объектов позволяет решать множество задач по автоматизации трёхмерного моделирования как в «статике», так и в «динамике», в частности, реальных сцен поверхности Земли по данным космического и подспутникового мониторинга. Данная возможность обусловлена стандартизацией объектов земной поверхности антропогенного и даже природного происхождения (зданий, сооружений, дорог, лесомассивов и др.), периодизацией структуры природных и антропогенных объектов на разных уровнях детализации (электропоезда, железные и автомобильные дороги, их подсистемы и разный уровень дифференцирования и т.п.) и др.