Символические вычисления с помощью расширенных чисел и их применения в области космического мониторинга

Рихтер А.А.
НИИ "АЭРОКОСМОС", Москва, Российская Федерация

Постановка задачи

- Для удобства калькуляции символических выражений (операции сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в степень, дифференцирования или интегрирования, композиции, операции отношений и др.) их можно конвертировать в многочлены, а те в свою очередь – в расширенные числа (адели) либо в большие арифметические числа (гугологизмы). Так, элементарные функции раскладываются в ряды Маклорена и аппроксимируются многочленами, которые конвертируются в рациональные расширенные числа (по аналогии с рациональными арифметическими числами, в которых десятичная часть числа имеет период). Делению многочлена на многочлен также соответствует рациональное расширенное число, а возведению многочлена в рациональную степень – предположительно иррациональное (с отсутствием целой или дробной частей числа, описываемых детерминированными функциями), округляемое до рационального или целого.
- Для возможности обработки информации на том или ином уровне возникает потребность в символических вычислениях. В частности, в области обработки многомерных сигналов (аэрокосмической информации) – при реставрации и геометрических преобразованиях изображений, кодировании информации, морфологической обработке, аппроксимации и интерполяции, регрессионном анализе и прогнозировании. Например, символическая калькуляция на базе многочленов и расширенных чисел как от одной, так и от большего числа переменных применима в технологии полиномиального, циклического кодирования, шифрования текстового сообщения используются примитивные многочлены. Функцию, аппроксимируемую многочленом, можно отобразить в расширенное число, поэтому распознавание фигур объектов на спутниковых изображениях можно провести сравнением числа контура дешифрируемого объекта с числом эталонной фигуры. Преобразования сигналов (двухмерных, трёхмерных и др.) по некоторой функциональной цепи также можно провести, рассчитав расширенное число этой цепи.

Многочлены

Одночлен:

$$p(x) = ax^{v},\ x^{v} := \prod_{i=1}^{m} x_i^{v_i}$$

a – коэффициент ($a \in W^5$)

$x=[x_1 \,..\, x_m]$ – вектор переменных

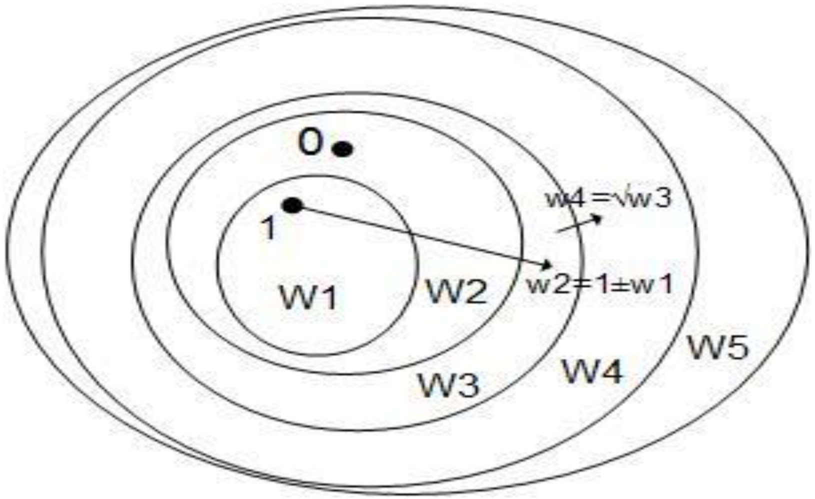
$v=[v_1 \,..\, v_m]$ – мультииндекс ($v_i \in W^3$)

m – размерность одночлена ($m \in W^1, m \neq +\infty$)

v_i – степень одночлена по переменной x_i

$d' = \sum_{i=1}^{m} v_i$ - общая степень

При $m=d'=v_i=0$ одночлен вырождается в число.



W^0 – ноль

W^1 – натуральные числа

W^2 – целые числа

W^3 – рациональные числа

W^4 – вещественные числа

W^5 – комплексные числа

Многочлен:

$$P(x) = \sum_{v} p_v(x) = \sum_{v=v^1}^{v^l} a_v x^v, \quad \sum_{v=v^1}^{v=v^l} := \sum_{v_1=v_1^1}^{v_1=v_1^{l_1}} .. \sum_{v_m=v_m^1}^{v_m=v_m^{l_m}}$$

a_v – коэффициенты

$[v_i^j],\ j=1..l_i,\ i=1..m$ - индексы

$r = \prod_{i=1}^{m} l_i$ - число слагаемых

$v_{\max i} = \max_j v_i^j$ - степень многочлена по переменной x_i

$d = \sum_{i=1}^{m} v_{\max i}$ - общая степень

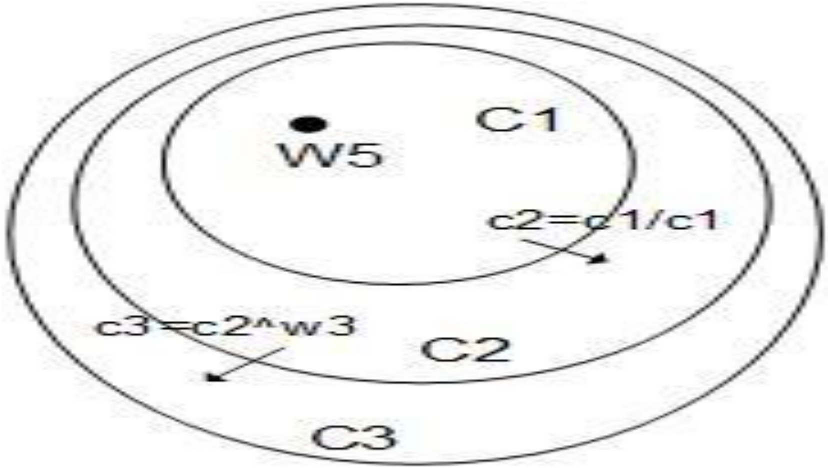
При $r=1$ многочлен вырождается в одночлен.

$C^0=W^5$

C^1 – многочлены

C^2 – рациональные дроби

C^3 – «иррациональные» дроби



Расширенные числа

$$P := \sum_u a_u x^u = \sum_{i=n^1}^{n^2} a_i x^i = \sum_{j=n_m^1}^{n_m^2} b_j^m x_m^j = \sum_{j=0}^{n_m^2} b_j^m x_m^j + \sum_{j=n_m^1}^{-1} b_j^m x_m^j = [P] + \{P\} \leftrightarrow b$$

$$b_j = b_j(x_1..x_{m-1}), \quad x = [x_1..x_m], \quad n^1 = [n_1^1..n_m^1], \quad n^2 = [n_1^2..n_m^2]$$

[P]=P(x,b²) – «целая», *{P}=P(x,b¹)* – «дробная» часть многочлена *P=P(x,b)*.

Расширенное число *m*-го порядка:

$$b = \overline{b'.b''}, \quad b' = \overline{b_{n_m^2}^m..b_0^m}, b'' = \overline{b_{-1}^m..b_{n_m^1}^m}$$

b'=[b^m] – целая, *b''={b^m}* – дробная («десятичная») часть числа *b=b^m*,

$b_j^k,\ j = n_k^1..n_k^2, k = m$ - разряды числа

(расширенные числа m-1-го порядка)

$$l' = |b'| = |[b]| = n_m^2 + 1$$

- длина целой части числа

$$l'' = |b''| = |\{b\}| = n_m^1$$

- длина дробной части числа

Примеры:

- Арифметическое число: $a = [a] = \overline{a}, \{a\} = 0$
- Одночлен: $p(x) = ax_1^n \leftrightarrow b$

$$b = \overline{a00..0} = a \cdot \overline{100..0} = a \cdot 10^n, n > 0$$

$$b = \overline{0.00..0a} = a \cdot \overline{0.00..0} = a \cdot 10^n, n < 0$$

- Полином: $P(x) = b_n x^n + ... + b_0 x^0 \leftrightarrow b$

$$[b] = \overline{b_n..b_1 b_0}, \{b\} = 0$$

- Многочлен в натуральных степенях от двух переменных:

$$P(x_1, x_2) = x_2^{n_2}(b_{n_1 n_2} x_1^{n_1} + .. + b_{0 n_2} x_1^0) + ..$$

$$+ x_2^0(b_{n_1 0} x_1^{n_1} + .. + b_{00} x_1^0) \leftrightarrow b$$

$$b = \overline{b_{n_1 n_2}..b_{0 n_2}'...'b_{n_1 0}..b_{00}}$$

Вычисления расширенных чисел

Пример операции «столбиком»:

a=a'.a''; b=0.b''
a'=11 4; a''=3; b''=5 . 2

P(a')=11x+4, P(a'')=3, P(b'')=5+2x^-1
P(a)=P(a')+P(a'')y^-1
P(b)=P(b'')y^-1
P(a+b)=P(a)+P(b)=11x+4+(8+2x^-1)y^-1

$$\begin{array}{r} \text{a+b} \\ +\begin{array}{r} \text{a'. a''} \\ \text{0. b''} \\ \hline \text{a'.a''+b''} \end{array} \end{array} \qquad \begin{array}{r} \text{a''+b''} \\ +\begin{array}{r} 3.\ 0 \\ 5.\ 2 \\ \hline 8.\ 2 \end{array} \end{array}$$

Экспоненциальная форма расширенного числа (|n|>>0):

$$a = \overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} .. a_0} \approx \overline{a_n . a_{n-1} a_{n-2}} * 10^{n-1}$$

Некоторые свойства:

$$a + b = c \Leftrightarrow [a] + [b] = [c]; \quad \{a\} + \{b\} = \{c\}$$
$$0 + a = a; \quad a + b = b + a; \quad a + (b + c) = (a + b) + c$$
$$1 * a = a; \; a * b = b * a$$
$$a * (b * c) = (a * b) * c; \quad a * (b + c) = a * b + a * c$$
$$a = -(-a); \quad a - a = 0$$
$$(a / b) / c = a / (b / c); \quad (a + b) / c = a / c + b / c$$
$$a^{m+n} = a^m a^n; \quad a^0 = 1; \quad 0 * a = 0$$
$$a^1 = a; \quad a^{-1} = 1 / a \approx a'; \quad a^m \approx a'$$

$a, b, c, d, e, a' \in W^+, \; m, n \in W^3,$ a' – приближённые значения для операций деления и возведения в рациональную степень, W^+ - кольцо расширенных чисел

Замена символического исчисления на исчисление расширенных чисел

$$\frac{a}{b} = d\frac{r}{b} \Leftrightarrow a = d * b + r, \quad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ae/b + ce/d}{e}, e = НОК(b, d)$$

$$\frac{a}{b} * \frac{c}{d} = \frac{a * c}{b * d}, \quad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a * d}{b * c}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

d – частное от деления a на b, r – остаток от деления, a/b, c/d, .. – расширенные дроби, $\{w_i\}$ – разложение на сомножители

$$a = \prod_{i=1}^{k} w_i^{q_i}$$

Вычисления расширенных чисел

Рациональные расширенные числа

$$\frac{1}{1-1/x} = 1 + x^{-1} + x^{-2} + \ldots \leftrightarrow a = 1.(1)$$

$$e^{1/x} = 1 + \frac{1}{1!}x^{-1} + \frac{1}{2!}x^{-2} + \ldots \leftrightarrow a = 1.\left(\frac{1}{p!}\right)$$

$$\sin 1/x = x^{-1} - \frac{1}{3!}x^{-3} + \frac{1}{5!}x^{-5} - \ldots \leftrightarrow a = 0.\left(\frac{1}{p!} \quad \frac{1}{(p+2)!}\right)$$

...

a=a'.a''=a'.a''(0)=(0)a'.a''=(0)a'.a''(0).

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x^1 + x^2 + \ldots \leftrightarrow a = (1)1.0$$

Замена символического исчисления на исчисление арифметических чисел

Отображение расширенного числа в арифметическое:

$$P(x) \leftrightarrow a \Leftrightarrow \alpha$$

$$\alpha = \sum_{i_m = n_m^1}^{n_m^2} 10^{q_m i_m} \sum_{i_{m-1} = n_{m-1}^1}^{n_{m-1}^2} 10^{q_{m-1} i_m} \ldots \sum_{i_1 = n_1^1}^{n_1^2} 10^{q_1 i_1} a_i$$

$$q_j = \prod_{k=0}^{j-1} w_k, \; w_k = \max|(n_k^1|,|n_k^2|)$$

n_0^1 и n_0^2 - предельные длины дробной и целой частей арифметических чисел в составе расширенного числа а

α – гугологизм длины $L(\alpha) = \sum_{j=1}^{m} q_j w_j$

Дифференцирование и интегрирование

Целое расширенное число 1-го порядка: $a^{(k)} = b, \quad a = \overline{a_n..a_0}, \quad b = \overline{b_{n+k}..b_0}$

$$b_{i+k} = a_i \frac{i!}{(i+k)!}, -k \le i \le n$$

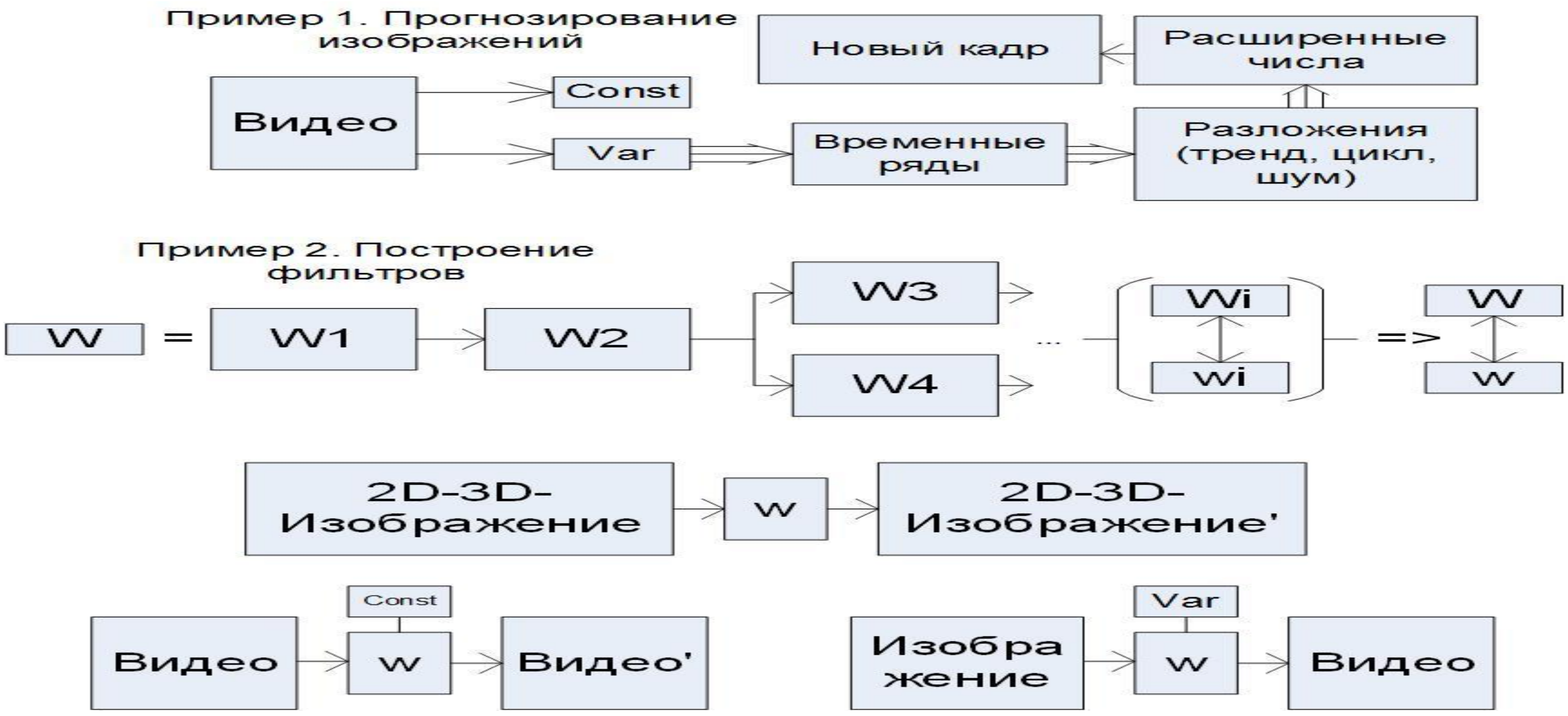
k>0 – интегрирование,
k<0 – дифференцирование,
k=0 – тождественность (a=b)

Вариант интерфейса калькулятора расширенных чисел

Элементарные функции *f(a)≈b* (тригонометрические, гиперболические, экспоненты, логарифмы и др.) дают приближённое расширенное число *b* в разложении в соответствующий ряд Маклорена.
Команды: «F(a)» – корни полинома, заданного числом *a*; «P(a)» – отображение числа a в полином; «a^(k)» – дифференцирование *k*-й степени (*k* – целое число); «a|c» – отображение расширенного числа в арифметическое, т.е. значение полинома *P(a)* в точке *c* (в более общем виде: a|c, a|b, a|M)

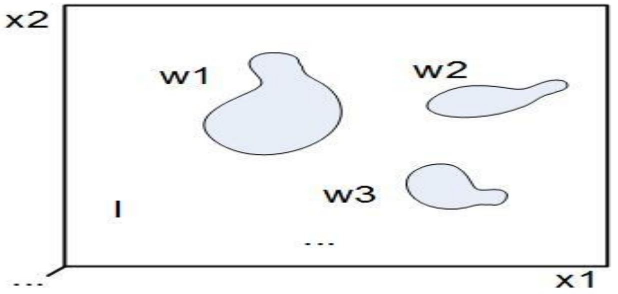
Применения расширенных чисел в области улучшения качества изображений

Область применения: реставрация и искажения изображений, кодирование информации, морфологическая обработка, аппроксимация и интерполяция, регрессионный анализ и прогнозирование

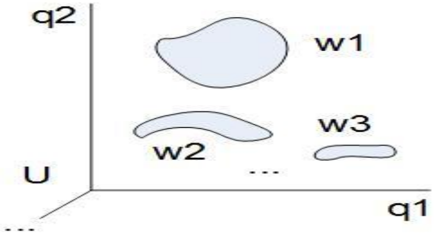


Применения расширенных чисел в области улучшения качества изображений

Пример 3. Детектирование объектов и событий



Изображение (I)



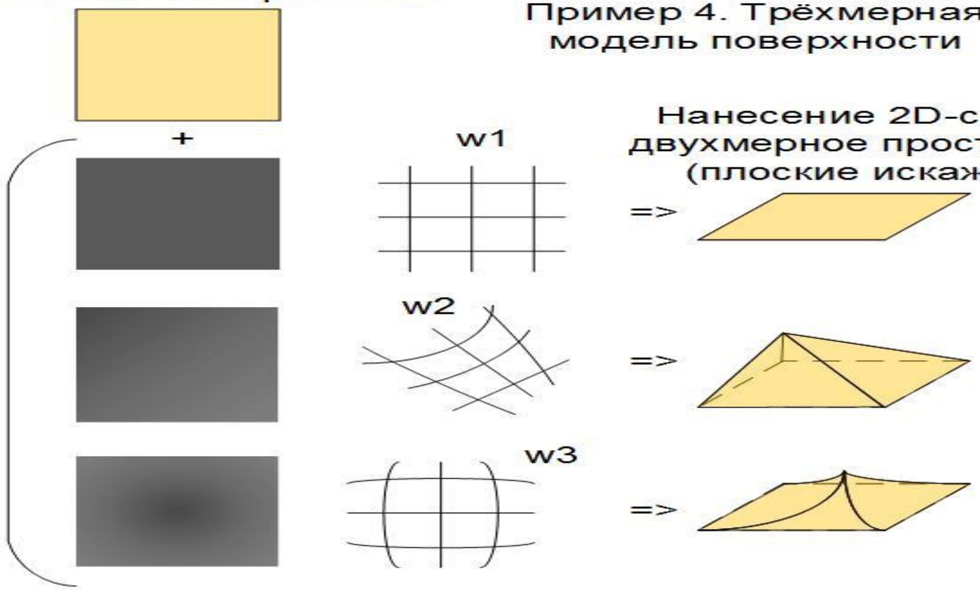
Пространство информационных признаков (U)

xi – Пространственные координаты
qi – Яркостные координаты
wi – Расширенные числа

Пример 4. Трёхмерная модель поверхности

Оптическое изображение

Нанесение 2D-сетки на двухмерное пространство (плоские искажения)



Радарные изображения

Пример 5. Построение 3D-Модели на 3D-Сетке при панорамной съёмке

Нанесение 3D-сетки на трёхмерное пространство (пространственные искажения)

Внешняя панорамная съёмка

Внутренняя панорамная съёмка

Алгебра расширенных чисел

Блоки функций:

- Вывод данных (вывод числа, представление числа в экспоненциальной, округлённой и других формах, вывод многочлена, арифметического числа, нескольких чисел, разложения числа и др.)
- Интегро-дифференцирование (интегрирование и дифференцирование в целой, рациональной степени и др.)
- Работа с комплексными числами (разложение числа на действительную и мнимую части, выделение действительной и мнимой частей, модуля и аргумента и др.)
- Работа с числами больше первого порядка (арифметические операции, операции сравнения, работа с элементарными функциями чисел, интегро-дифференцирование, значение в точках и др.)
- Операции отношений (больше, меньше, равно, неравно и др.)
- Унарные и бинарные операции (унарный плюс и минус, сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в степень, извлечение корня, композиция и др.)
- Работа с числами элементарных функций (расширенные числа от тригонометрических, гиперболических, логарифмических функций и др.)
- Работа с делимостью числа (разложение числа на сомножители, НОД и НОК чисел, остаток от деления, разложение числовой дроби на сомножители и др.)
- Прочие функции (округление числа, изменение порядка, задание одночленов, значение числа в арифметической или расширенной точке и др.)

Примеры методов и операций алгебры расширенных чисел, Python

```
# округление до стандартного значения
def rou_(r):
    r_=P()
    rr=r.w1
    ll=len(rr)
    for i in range(ll):
        #if math.fabs(rr[i])<=eee:
        rr[i]=copy.deepcopy(round_(rr[i],ee
    k=0
    for i in range(ll):
        if rr[i]!=0:
            k=1
            break
    if k:
        r_.w1=rr[i:]
    else:
        r_.w1=[]
    rr=r.w2
    ll=len(rr)
    for i in range(ll):
        #if math.fabs(rr[i])<=eee:
        rr[i]=copy.deepcopy(round_(rr[i],ee
    k=0
    for i in range(ll):
        if rr[ll-1-i]!=0:
            k=1
            break
    if k:
        r_.w2=rr[:ll-i]
    else:
        r_.w2=[]
    return r_
```

Округление числа до стандартного значения

```
# деление чисел
def _div_(self,other):
    r=P()
    k1=(isinstance(self,P) and isinstance(other,numbers.Number
    k2=(isinstance(self,numbers.Number) and isinstance(other,P
    if k1:
        r.w1=list(np.polymul(self.w1,[1/other]))
        r.w2=list(np.polymul(self.w2,[1/other]))
    elif k2:
        q=len(other.w1)+len(other.w2)+ee
        w=[self]+[0]*(q)
        rr=list(np.polydiv(w,other.w1+other.w2)[0])
        q=len(rr)-len(other.w1)-ee
        r.w1=rr[:q]
        r.w2=rr[q:]
    else:
        q1=len(self.w2)
        q2=len(other.w2)
        if q1>=q2:
            self_=self.w1+self.w2
            other_=other.w1+other.w2+[0]*(q1-q2)
        else:
            self_=self.w1+self.w2+[0]*(q2-q1)
            other_=other.w1+other.w2
        q1=len(self_)
        q2=len(other_)
        if q1>=q2:
            w=self_+[0]*(ee)
            rr=list(np.polydiv(w,other_)[0])
            q=len(rr)-ee
            r.w1=rr[:q]
            r.w2=rr[q:]
        else:
            w=self_+[0]*(q2-q1+ee)
            rr=list(np.polydiv(w,other_)[0])
            q=len(rr)-ee+q1-q2
            if q<0:
                r.w1=[]
                r.w2=[0]*(-q)+rr
            else:
                r.w1=rr[:q]
                r.w2=rr[q:]
    return r
```

Деление чисел

```
# возведение числа в степень
def _pow_(self,other):
    k1=(isinstance(self,P) and isinstance(other,int))
    k2=(isinstance(self,P) and isinstance(other,float))
    k3=(isinstance(self,numbers.Number) and isinstance(other,P))
    if k1:
        r=_pown_(self,other)
    elif k2:
        r=_powr_(self,other)
    elif k3:
        r=_powq_(other,self)
    else:
        r=_powc_(self,other)
    return r

# возведение в целую степень
def _pown_(self,n):
    r=P()
    r_=P()
    r.w1=[1]
    if n>0:
        for i in range(n):
            r_=r*self
            r.w1=copy.deepcopy(r_.w1)
            r.w2=copy.deepcopy(r_.w2)
    elif n<0:
        for i in range(-n):
            r_=r//self
            r.w1=copy.deepcopy(r_.w1)
            r.w2=copy.deepcopy(r_.w2)
    return r
```

Возведение числа в степень (возведение в целую степень)

Примеры вычислений чисел

Пример 1

```
w1=P([1,2,1,-1],[-1])
w2=P([2,3],[5,2])
fg(w1) # число w1
fg(w2) # число w2
fg(w1,4) # экспоненциальная форма с порядком 4
fg(w1,-4) # экспоненциальная форма с порядком -4
```

```
[1.0, 2.0, 1.0, -1.0],[-1.0]
[2.0, 3.0],[5.0, 2.0]
[],[1.0, 2.0, 1.0, -1.0, -1.0]*10e4
[1.0, 2.0, 1.0, -1.0, -1.0, 0, 0, 0],[]*10e-4
```

Пример 2

```
w1=P([1,2,1,-1],[-1])
w2=P([2,3],[5,2])
W=((w1//w2+w1-w2)*w1)**4
fg(W)
```

```
[1.0, 18.0, 142.5, 627.5, 1492.6875, 655.0, -7965.1875, -27831.6875, -37749.08984, 19267.35156, 173938.4668, 304290.19727, 1383
44.20776, -429828.20508, -983845.50391, -826732.25586, 167078.94707, 1178141.06235, 1317458.58685, 693421.73753, 108736.42812,
-113303.85986, -312665.89899, -603833.28992, -625495.32355],[-271006.14748, 66873.72821, 131713.6927, 94320.76696, 116806.0089
7, 120373.77097, 47810.70721, -16241.93245, -21148.44509, -10002.04834, -11534.10344, -11273.49768, -3813.17542, 919.47389, 89
7.87489, 414.62506, 511.49118, 385.74854, 129.25293, 16.25147]
```

Пример 3

```
w1=P([1,2,1,-1],[-1])
w2=P([2,3],[5,2])
W=(sin_(w1)+ln_(w2))*exp_(2*w1+w2)
fg(W)
```

```
[-1e-05, 0.0, 0.0, 0.0, -2e-05, 5e-05, 8e-05, -1e-05, -0.0004, -0.00034, -0.00146, -0.00259, -0.00249, -0.00252, 0.00578, -0.00
04, -0.03526, -0.09325, -0.12728, 0.02099, 0.56266, 1.59737, 2.21232, 0.27024, -6.99377, -19.97619, -31.48498, -21.01649, 41.60
133, 167.48795, 313.72841, 308.12034, -69.048, -973.19769, -2129.52719, -2607.1271, -1139.46632, 3186.52682, 9538.94482, 12774.
77561, 8892.25443, -6368.00253, -25516.07331, -34129.96425, -33565.67855, 28618.80243, -27309.78133, 107487.96443, 148570.8045
5, 145075.24352, 467585.4102, -410317.56317, -311702.75094, -833241.06639, 63539.0383, 2781810.09493, 5340379.91594, 12106772.7
3725, 6903139.30371, 5136182.7785, 6771599.20825, 9989400.02226, 14546998.31023, 20837575.93136, 38657080.62632, 54926704.5553
7, 67243579.97399, 72840489.28294],[73369542.03451, 67110222.84629, 57761962.986, 41955064.33156, 38271918.71738, 31647111.6000
6, 26604977.23219, 22226231.52185, 20570892.46305, 21847185.58776, 11440206.08163, 6613180.52828, 2243514.00908, 809031.15207,
-921564.70404, -441981.68508, 280608.4676, 34305.44513, -86239.45617, -83003.56887, 7203.99888, -58134.50908, -31044.53456, -13
270.77973, -1457.47262, -4428.2621, -1393.25873, -130.60404, 46.94934, -383.35524, -111.2456, -30.00257, -1.73081, 1.8762, 0.77
664, -0.93729, 0.01191, 0.02147, 0.06882, 0.01955, 0.01961, 0.01092, 0.00389, 0.00065, 0.00091, 0.00027, 6e-05, 2e-05]
```

Выводы

1. Многочлены и другие алгебраические выражения могут быть отображены в расширенные числа, что даёт возможность осуществлять символические операции посредством арифметических над расширенными числами. Аналогия «поведения» арифметических, расширенных чисел и многочленов в алгебраических структурах (группах, кольцах и полях) свидетельствует о корректности такого отображения и допустимости технологии исчисления расширенных чисел любого порядка и длины числа. Следует заметить, что для исчисления расширенных чисел необходимы машины с высокой вычислительной мощностью, которые на сегодняшний день, к сожалению, способны работать с расширенными числами ограниченной длины и порядка.

2. Приведён подход по улучшению качества и обработки изображений: калькуляция расширенных чисел, через которых можно проводить символическое исчисление (многочленов и других алгебраических функций), применяемое в различных областях общей и прикладной математики, в том числе в области цифровой обработки многомерных сигналов: прогнозирование изображений, построение фильтров, детектирование объектов и событий, трёхмерное моделирование поверхности, построение геометрических моделей на трёхмерной сетке при панорамной съёмке (символическое исчисление).