Методы вариационной ассимиляции данных и разделения области в задаче гидродинамики открытой акватории

Лёзина Н.Р. (natalez92@mail.ru), Шелопут Т.О. (tania_chel@list.ru)

Институт вычислительной математики им. Г.И. Марчука РАН

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта 19-01-00595

Введение

При разработке моделей гидродинамики открытых акваторий неизбежно возникает проблема постановки граничных условий на внешних жидких границах. Для таких задач возможно применение метода разделения области, который позволяет сводить процесс решения задачи в исходной области к решению задач в подобластях, зависящих друг от друга только в местах их пересечений.

Данные наблюдений

Предположим, что имеются данные об уровне, которые могут быть получены по данным спутниковой альтиметрии, или данные о баротропной составляющей скорости на внешней жидкой границе, которые могут быть получены из непосредственных измерений скорости по глубине, рассчитаны по данным спутниковой альтиметрии или получены из расчетов глобальной модели гидродинамики. Далее в формулах такие данные будут помечены индексом *obs*

Математическая модель

Рассмотрим систему уравнений гидротермодинамики в приближении Буссинеска и гидростатики:

$$
\begin{cases}
\dfrac{d\vec{u}}{dt} + \begin{bmatrix} 0 & -f \\ f & 0 \end{bmatrix} \vec{u} - g\,\mathrm{grad}\xi + A_u \vec{u} + (A_k)^2 \vec{u} = \\
= \vec{f} - \dfrac{1}{\rho_0}\mathrm{grad} P_a - \dfrac{g}{\rho_0}\mathrm{grad}\displaystyle\int_0^z \rho_1(T,S)dz'\,, \\
\dfrac{\partial \xi}{\partial t} - m\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(\displaystyle\int_0^H u dz\Big) - m\dfrac{\partial}{\partial y}\Big(\displaystyle\int_0^H \dfrac{n}{m} v dz\Big) = f_3, \\
\dfrac{dT}{dt} + A_T T = f_T, \qquad \dfrac{dS}{dt} + A_S S = f_S
\end{cases}
\qquad (1)
$$

Метод расщепления

Для аппроксимации по времени системы (1) используется метод расщепления. На каждом интервале времени решаются следующие подзадачи (шаги метода расщепления [1]):

- Задача о распространении тепла
- Задача конвекции-диффузии для солености
- Задача об отыскании функции уровня и интегральных скоростей
- Вычисление поля векторов скоростей

Линеаризованная система уравнений мелкой воды:

Далее будем рассматривать один из шагов метода расщепления (задача об отыскании функции уровня и интегральных скоростей), который соответствует следующей системе уравнений:

$$
\begin{cases}
\vec{u}_t + l \otimes \vec{u} + r\vec{u} - g\,\mathrm{grad}\,\xi = \vec{f} \quad \text{в} \quad \Omega \times (t_0, t_1), \\
\xi_t - \mathrm{div}(H\vec{u}) = f_3 \quad \text{в} \quad \Omega \times (t_0, t_1), \\
\vec{u} = \vec{u}_0, \qquad \xi = \xi_0 \quad \text{при} \quad t = t_0 \quad \text{в} \quad \Omega, \\
(H\vec{u}) \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega \times (t_0, t_1),
\end{cases}
$$

где $\vec{u} = (u, v)$ – вектор скорости, ξ – функция уровня

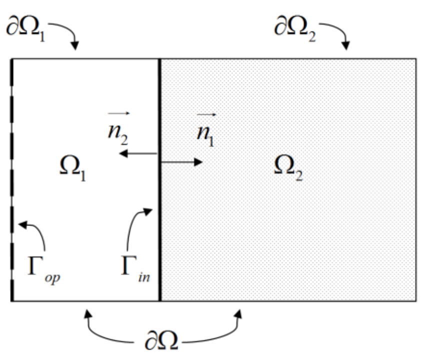
[1] V. I. Agoshkov, Formulation and study of some inverse problems in modelling of hydrophysical fields for water areas with ‘liquid’ boundaries. *Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling (2017) 32, No. 2, 73–90.*

Восстановление граничных функций на внешних и внутренних жидких границах в задаче ассимиляции данных наблюдений за уровнем моря [2]

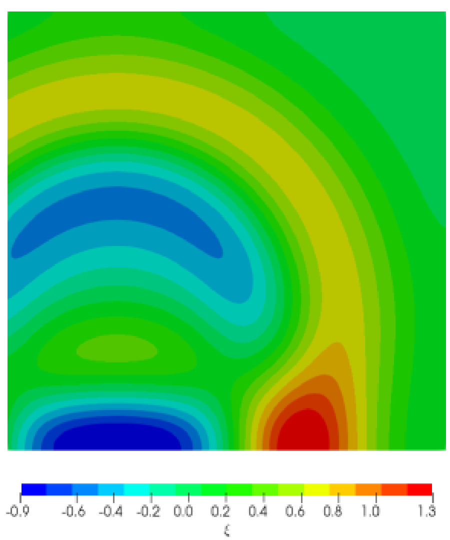
- Граничные условия на внешней жидкой границе
$$\vec{u}\cdot\vec{n}+m_{w,op}\sqrt{gH}\,\xi=m_{w.op}\sqrt{gH}\,d_s \quad \text{на} \quad \partial\Omega\times\left(t_{j-1},t_j\right),$$
где d_s – «дополнительная неизвестная»
- Условия сшивки на внутренней жидкой границе
$$\xi^{(1)}=\xi^{(2)},\ Hu_n^{(1)}=Hu_n^{(2)} \quad \text{на} \quad \Gamma_{in};$$
- Введем «дополнительную неизвестную» на внутренней границе
$$\sqrt{gH}\,\vartheta_{sw}\equiv Hu_n^{(1)}=Hu_n^{(2)}$$

Рассмотрим исходную задачу как задачу минимизации функционала

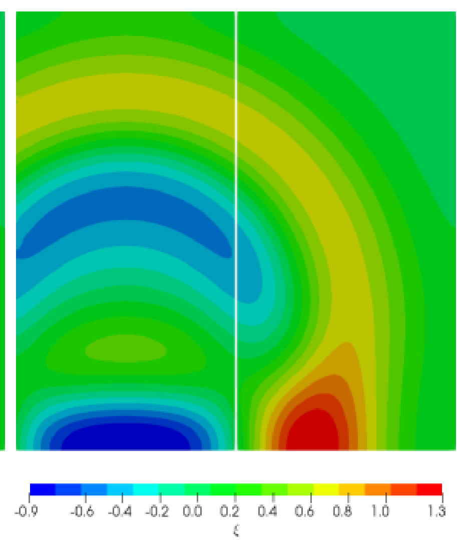
$$J_\alpha=\frac{\alpha}{2}\left(\int\limits_{\Gamma_{op}}\sqrt{gH}\left(d_s-d_s^{(0)}\right)^2d\Gamma+\int\limits_{\Gamma_{in}}\sqrt{gH}\left(\vartheta_{sw}-\vartheta_{sw}^{(0)}\right)^2d\Gamma\right)+$$
$$+\frac{1}{2}\left(\int\limits_{\Gamma_{op}}\sqrt{gH}\left(\xi_1-\xi_{obs}\right)^2d\Gamma+\int\limits_{\Gamma_{in}}\sqrt{gH}\left(\xi_1-\xi_2\right)^2d\Gamma\right)$$



Область с внутренней (Γ_{in}) и внешней (Γ_{op}) жидкой границей



(а)



(б)

Значения уровня на конечный момент времени (а) для решения исходной задачи; (б) для решения задачи с применением методов разделения области и вариационной ассимиляции данных

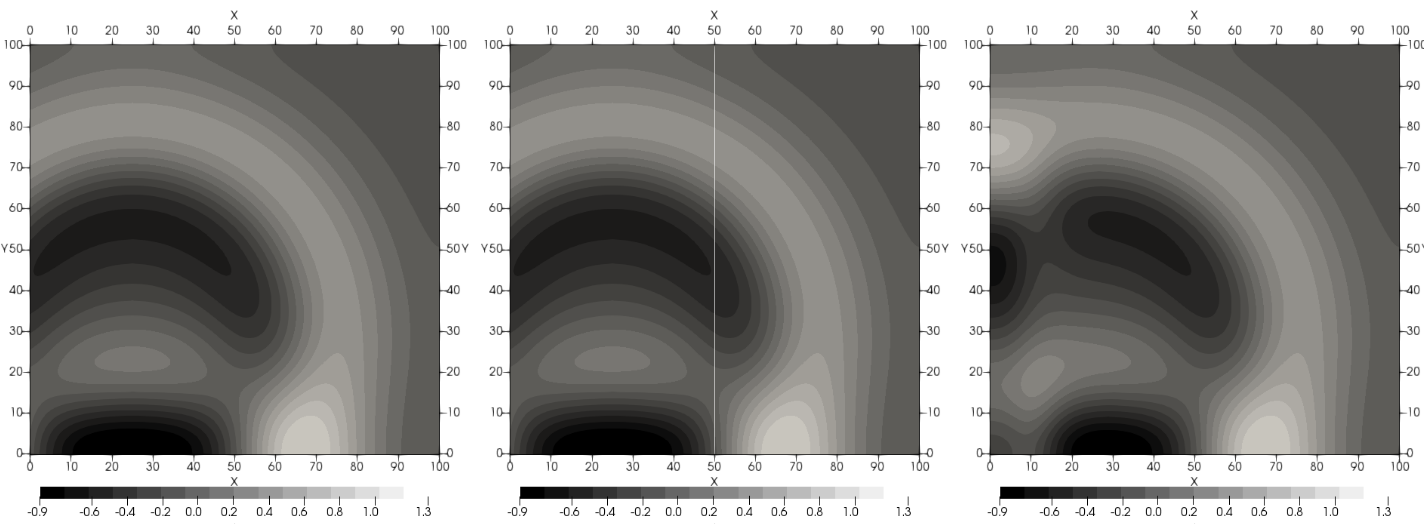
[2] V. Agoshkov, N. Lezina, T. Sheloput. Domain Decomposition Method for the Variational Assimilation of the Sea Level in a Model of Open Water Areas Hydrodynamics //J. Mar. Sci. Eng. 2019, 7(6), 195.

Восстановление граничных функций на внешних и внутренних жидких границах в задаче ассимиляции данных о баротропных скоростях [3]

- Граничные условия на внешней жидкой границе
  $\vec{u}\cdot\vec{n} + m_{w,op}\sqrt{gH}\,\xi = m_{w.op}\sqrt{gH}\,d_s \quad \text{на} \quad \partial\Omega\times\left(t_{j-1},t_j\right);$
- Условия сшивки на внутренней жидкой границе
  $\xi^{(1)} = \xi^{(2)},\ Hu_n^{(1)} = Hu_n^{(2)},$
- Введем «дополнительную неизвестную» на внутренней границе
  $\vartheta_{sw} \equiv \xi^{(1)} = \xi^{(2)}$

Рассмотрим исходную задачу как задачу минимизации функционала

$$J_\alpha = \frac{\alpha}{2}\left(\int_{\Gamma_{op}} g\sqrt{gH}\left(d_s - d_s^{(0)}\right)^2 d\Gamma + \int_{\Gamma_{in}} g\sqrt{gH}\left(\vartheta_{sw} - \vartheta_{sw}^{(0)}\right)^2 d\Gamma\right) +$$
$$+\frac{1}{2}\left(\int_{\Gamma_{op}} \gamma\sqrt{\frac{g}{H}}\left(Hu_n^{(1)} - I_{obs}\right)^2 d\Gamma + \int_{\Gamma_{in}} \sqrt{\frac{g}{H}}\left(Hu_n^{(1)} - Hu_n^{(2)}\right)^2 d\Gamma\right)$$



(а) (б) (в)

Значение уровня на конечный момент времени (а) исходной задачи; (б) для решения с применением методов; (в) без применения ассимиляции, с граничными условиями на внешней жидкой границе $\vec{u}\cdot\vec{n}=0$

[3] Агошков В. И., Лёзина Н. Р., Шелопут Т. О. Восстановление граничных функций на внешних и внутренних жидких границах в задаче гидродинамики открытой акватории // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2020. Т. 60. № 11. С. 1915-1932.